Variables aléatoires

I. Rappels sur les probabilités

1) Événements

➫ Une éventualité (ou événement élémentaire) est un résultat possible lors d'une expérience aléatoire.
➫ L'ensemble de toutes les éventualités est l'univers Ω.
➫ Un événement est un ensemble d'éventualités, donc une partie de l'univers.
➫ L'intersection des événements A et B, notée $A \cap B$ ("A inter B") est l'ensemble des éventualités qui se trouvent dans A **et** dans B.
➫ La réunion des événements A et B, notée $A \cup B$ (« A union B »), est l'ensemble des éventualités qui sont dans A **ou** dans B (ou dans les deux).

2) Probabilités

➫ Si A est un ensemble fini alors la probabilité de l'événement A, notée $P(A)$, est la somme des probabilités des éventualités contenues dans A.
➫ Dans un cas d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est :

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{nombre d'éventualités dans } A}{\text{nombre total d'éventualités}}}$$

(nombre de cas favorables / nombre de cas possibles).
➫ Propriétés indispensables :

$\boxed{0 \leqslant P(A) \leqslant 1}$ $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$ $\boxed{P\left(\bar{A}\right) = 1 - P(A)}$.

3) Probabilités conditionnelles

➫ La probabilité que B se réalise sachant que A est réalisé est :

$$\boxed{P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

$P_A(B)$ se lit « probabilité de B sachant A », c'est une probabilité conditionnelle.
➫ Calcul de $P(A \cap B)$: $\boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)}$
➫ Formule des probabilités totales :
Si A_1, A_2, ... A_n forment une partition de l'univers alors

$$\boxed{\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B) \\ &= P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \cdots + P(A_n) \times P_{A_n}(B). \end{aligned}}$$

II. Variables aléatoires

1) Exemples et définition

Exemple 1

Lançons un dé à quatre faces (dé tétraèdrique) deux fois de suite et intéressons-nous à la somme des deux résultats, notée X. L'univers peut être ici modélisé par :
$\Omega = \{(1;1);(1;2);(1;3);(1;4);(2;1);(2;2);(2;3);(2;4);(3;1);(3;2);(3;3);(3;4);(4;1);(4;2);(4;3);(4;4)\}$.
Les valeurs que peut prendre X sont $2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\,;\,7\,;\,8$.
La valeur de X dépend du résultat de l'expérience, nous dirons que X est une *variable aléatoire*.

Exemple 2

Lançons un dé à six faces jusqu'à obtenir un 6 et appelons X le nombre de lancers nécessaires.
Le 6 peut mettre beaucoup de temps à apparaître (par exemple dans le cas d'un dé truqué), de ce fait X peut prendre n'importe quelle valeur dans $\{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\,;\,7\,;\,\ldots\} = \mathbb{N}^*$.

Exemple 3

Soit X la durée d'attente à un guichet. En supposant que le guichet reste ouvert pendant 4 heures, X peut prendre n'importe quelle valeur de l'intervalle $[\,0\,;\,4\,]$.

Définition

Une variable aléatoire est une fonction X définie sur l'univers Ω de l'expérience et à valeurs réelles.

Exemple 1

Dans l'exemple précédent, l'image de l'éventualité $(2\,;\,3)$ par X est $X((2\,;\,3)) = 5$.

Remarques

➾ dans les exemples 1 et 2, la variable est *discrète* : il est possible de numéroter les valeurs que prend X ; celle de l'exemple 3 est par contre *continue* ;
➾ dans l'exemple 1, l'univers est *fini* (pas infini), seul ce cas est au programme de première ;
➾ sachez quand même pour information que, dans le cas d'une variable aléatoire non discrète, la dérivation et la fonction exponentielle jouent souvent un rôle. . .

2) Événements $\{X = k\}$, $\{X \leqslant k\}$, . . .

Définitions

L'événement $\{X = k\}$ est l'ensemble des éventualités de Ω qui ont pour image k par X.
L'événement $\{X \leqslant k\}$ est l'ensemble des éventualités de Ω qui ont une image inférieure ou égale à k par X.

Exemple 1

L'événement $\{X = 4\}$ est l'événement $\{(1\,;\,3);(2\,;\,2);(3\,;\,1)\}$.
L'événement $\{X \leqslant 4\}$ est l'événement $\{(1\,;\,1);(1\,;\,2);(1\,;\,3);(2\,;\,1);(2\,;\,2);(3\,;\,1)\}$.

Remarque

La probabilité de $\{X = k\}$ est notée $P(X = k)$ (au lieu de $P(\{X = k\})$).
De même, on écrira $P(X \leqslant k)$ (au lieu de $P(\{X \leqslant k\})$).

III. Loi d'une variable aléatoire

Définition

La loi d'une variable aléatoire discrète X est l'ensemble des couples $(x_i\,;\,P(X=x_i))$ où les x_i sont les valeurs pouvant être prises par X.
Une loi de variable aléatoire peut être représentée par un tableau :

Valeur x_i	x_1	x_2	$\dots\dots$	x_n
$P(X=x_i)$	$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$	$\dots\dots$	$P(X=x_n)$

Remarque

La notion de loi a déjà été vue mais il s'agissait d'une loi de probabilité, où l'on associait à chaque éventualité une probabilité.

Propriété 1

Si X peut prendre les valeurs x_1, x_2, …, x_n alors $\boxed{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(X=x_i)=1}$.

Remarque

La notation « $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\dots\dots$ » signifie « somme pour i allant de 1 à n ».

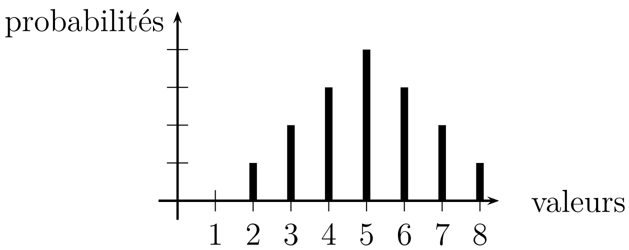
Exemple 1

Déterminer la loi de la variable aléatoire X de l'exemple précédent (somme de deux dés tétraèdriques).

Les valeurs pouvant être prises par X sont $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=4$, $x_4=5$, $x_5=6$, $x_6=7$, $x_7=8$.
Détaillons, par exemple, le calcul de $P(X=3)$:
$P(X=3)=P(\{(2\,;\,1);(1\,;\,2)\})=\dfrac{2}{16}$ car les 16 couples $(a\,;\,b)$ sont équiprobables. On procède de même pour les autres valeurs x_i. La loi de X est donc :

Valeurs de X : x_i	2	3	4	5	6	7	8
$P(X=x_i)$: p_i	$\dfrac{1}{16}$	$\dfrac{2}{16}$	$\dfrac{3}{16}$	$\dfrac{4}{16}$	$\dfrac{3}{16}$	$\dfrac{2}{16}$	$\dfrac{1}{16}$

que l'on peut représenter par un graphique :



Calculons maintenant la probabilité de l'événement « X est pair » donc de « $X=2$ ou $X=4$ ou $X=6$ ou $X=8$ ».
$P((X=2)\cup(X=4)\cup(X=6)\cup(X=8))=P(X=2)+P(X=4)+P(X=6)+P(X=8)=\dfrac{8}{16}=\dfrac{1}{2}$
car les événements $\{X=2\}$, $\{X=4\}$, $\{X=6\}$ et $\{X=8\}$ sont incompatibles deux à deux.

IV. Espérance

Définition

L'espérance d'une variable aléatoire X prenant n valeurs x_1, x_2, ..., x_n est égale à

$$\boxed{E(X) = P(X = x_1) \times x_1 + P(X = x_2) \times x_2 + \cdots + P(X = x_n) \times x_n = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i}$$

C'est, en probabilité, la moyenne des valeurs que prendrait X si l'on répétait un grand nombre de fois l'expérience.

Exemple 1

Calculons-la dans le cas précédent :

$$\begin{aligned} E(X) &= p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + p_3 \times x_3 + p_4 \times x_4 + p_5 \times x_5 + p_6 \times x_6 + p_7 \times x_7 \\ &= 2 \times \frac{1}{16} + 3 \times \frac{2}{16} + 4 \times \frac{3}{16} + 5 \times \frac{4}{16} + 6 \times \frac{3}{16} + 7 \times \frac{2}{16} + 8 \times \frac{1}{16} = \frac{80}{16} = 5 \end{aligned}$$

(sur beaucoup de lancers de deux dés, la somme moyenne des deux dés devrait être de 5).

Exemple 4

Un forain me propose ce jeu : je mise 1 € et le forain lance un dé à six faces une fois, s'il obtient un 5 alors il me donne 8 €, sinon j'ai perdu.

Ais-je intérêt à jouer ?

Réponse

Soit X le gain à l'issue d'une partie.

Alors la loi de X est :

Résultat du lancer du dé	1	2	3	4	5	6
Gain X	-1	-1	-1	-1	7	-1
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

donc

$$E(X) = -1 \times \frac{1}{6} + (-1) \times \frac{1}{6} + (-1) \times \frac{1}{6} + (-1) \times \frac{1}{6} + 7 \times \frac{1}{6} + (-1) \times \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Mon gain moyen se montera à $\frac{1}{3}$ € soit environ 33 cents : ce gain moyen est positif (pour moi).

Remarques

➾ l'espérance permet donc de savoir si un jeu est équitable (quand elle est nulle).

➾ bien sûr, avec du bon sens nous pouvions trouver la réponse sans l'espérance mais d'autres exemples sont plus retords...

➾ si je suis malchanceux, je peux perdre plus souvent que je gagne mais *statistiquement* le jeu est plus intéressant pour moi que pour le forain.

V. Variance et écart type

Définition

La variance de X est égale à $\boxed{V(X) = E((X - E(X))^2)}$.

Exemple 1

Rappelons que $E(X) = 5$.

Calculons d'abord les valeurs de la variable aléatoire $(X - E(X))^2$ puis son espérance :

Valeurs de X : x_i	2	3	4	5	6	7	8
Valeurs de $X - E(X)$	-3	-2	-1	0	1	2	3
Valeurs de $(X - E(X))^2$: x'_i	9	4	1	0	1	4	9
p_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

$$\begin{aligned} E((X - E(X))^2) &= p_1 \times x'_1 + p_2 \times x'_2 + p_3 \times x'_3 + p_4 \times x'_4 + p_5 \times x'_5 + p_6 \times x'_6 + p_7 \times x'_7 \\ &= 9 \times \frac{1}{16} + 4 \times \frac{2}{16} + 1 \times \frac{3}{16} + 0 \times \frac{4}{16} + 1 \times \frac{3}{16} + 4 \times \frac{2}{16} + 9 \times \frac{1}{16} = \frac{40}{16} = 2{,}5 \end{aligned}$$

donc $V(X) = 2{,}5$.

Propriété 2

$$\boxed{V(X) = E(X^2) - (E(X))^2}$$

Remarques

- cette propriété, admise, est la formule de König-Huygens ; elle donne une façon plus simple de calculer la variance ;
- la partie droite peut se lire ainsi : « l'espérance du carré moins le carré de l'espérance ».

Exemple 1

Pour l'exemple 1, la loi de X^2 est :

Valeurs de X^2	4	9	16	25	36	49	64
p_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

donc

$$\begin{aligned} V(X) &= 4 \times \frac{1}{16} + 9 \times \frac{2}{16} + 16 \times \frac{3}{16} + 25 \times \frac{4}{16} + 36 \times \frac{3}{16} + 49 \times \frac{2}{16} + 64 \times \frac{1}{16} - 5^2 \\ &= \frac{40}{16} = 2{,}5. \end{aligned}$$

Définition

L'écart-type de X est la racine carrée de sa variance :

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}.$$

Exemple 1

Calcul de $\sigma(X)$ pour l'exemple 1 :
$V(X) = 2{,}5$ donc $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2{,}5} \approx 1{,}581$.

Remarque

L'écart-type est un indicateur de la dispersion.
Par exemple, si j'appelle X la moyenne annuelle d'un élève choisi au hasard dans une classe, alors plus $\sigma(X)$ sera petit, plus les résultats de la classe seront homogènes.