Trigonométrie sphérique

I. Grands cercles

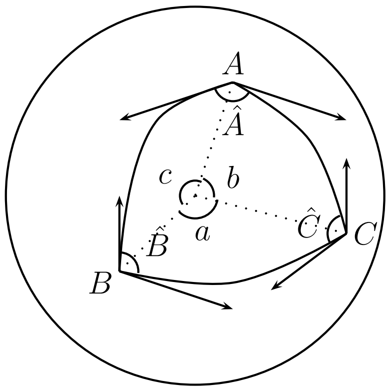
Dans tout ce chapitre, nous travaillerons sur une sphére de centre O et de rayon r.
La section d'une sphère par un plan $\mathscr{P}$ est un cercle. Si ce plan passe par le centre de la sphère alors on obtient un **grand cercle**.
La droite perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$ et passant par le centre de la sphère est appelé **axe du grand cercle**, il coupe la sphère en deux points appelés **pôles** du cercle.

Propriété 1
Par deux points non diamétralement opposés de la sphère passe un unique grand cercle.

II. Triangle sphérique

1) Définition et éléments d'un triangle sphérique

Considérons trois points A, B, C placés sur une même sphère. Ces points peuvent être joints deux à deux par trois arcs de grands cercles. La réunion de ces trois arcs est appelée **triangle sphérique** (ABC). Ses **éléments** sont :
– ses « **côtés** » (*) a, b, c où
$$\boxed{a = \widehat{BOC},\ b = \widehat{AOC},\ c = \widehat{AOB}}$$
– ses « **angles** » $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, formés par les tangentes aux grands cercles.



(*) On rappelle que la longueur d'un arc correspondant à un angle de α radians est $\ell = \alpha \times r$ donc les longueurs des arcs de grands cercles sont : $\boxed{\overset{\frown}{AB} = r.c,\ \overset{\frown}{BC} = r.a,\ \overset{\frown}{AC} = r.b}$. En particulier, si $r = 1$ alors les mesures des « côtés » du triangle sphérique correspondent bien aux mesures des longueurs des arcs de cercles $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{AC}$ et $\overset{\frown}{AB}$.

Propriété 2 (somme des « côtés » d'un triangle sphérique)
On a $\boxed{0 < a + b + c < 2\pi}$.

Propriété 3 (somme des « angles » d'un triangle sphérique)
On a $\boxed{\pi < \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 3\pi}$.

(la somme des angles d'un triangle sphérique est supérieure à 180 degrés...)

2) Aire d'un triangle sphérique

Définition
On appelle **excès sphérique** le nombre $\boxed{\varepsilon = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi}$.

Théorème 1 (Girard et Cavalieri)
L'aire du triangle sphérique (ABC) est égale à :
$$\boxed{\mathscr{A}(ABC) = \varepsilon.r^2}.$$

3) Relations liant les éléments d'un triangle sphérique

Théorème 2 (Formule fondamentale)
Avec les notations précédentes on a :
$$\boxed{\cos a = \cos b.\cos c + \sin b.\sin c.\cos \hat{A}}.$$

On peut bien sûr aussi écrire $\cos b = \cos a.\cos c + \sin a.\sin c.\cos \hat{B}$ et $\cos c = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b.\cos \hat{C}$.

Propriété 4 (Analogie des sinus)
Avec les notations précédentes on a :
$$\boxed{\frac{\sin a}{\sin \hat{A}} = \frac{\sin b}{\sin \hat{B}} = \frac{\sin c}{\sin \hat{C}}}.$$

Propriété 5 (Formule aux co-tangentes)
Si l'on note s, t, u, v quatre éléments se faisant suite dans un triangle sphérique alors on a $\cos t \cos u = \cot s \sin u - \sin t \cot v$ *où* $\cot = \dfrac{\cos}{\sin}$.

Remarque : Cas des triangles rectangles et rectilatères.

– Un triangle sphérique est rectangle si un de ses angles vaut $\dfrac{\pi}{2}$. Si, par exemple, l'angle $\hat{A}$ est droit alors la formule d'analogie des sinus donne : $\sin b = \sin a \sin \hat{B}$, $\sin c = \sin a \sin \hat{C}$ et la formule fondamentale devient : $\cos a = \cos b . \cos c$.
– Un triangle sphérique est rectilatère si un de ses côtés vaut $\dfrac{\pi}{2}$. Si, par exemple, $a = \dfrac{\pi}{2}$ alors on obtient $\sin \hat{B} = \sin b \sin \hat{A}$, $\sin \hat{C} = \sin c \sin \hat{A}$ et $\cos b = \sin c . \cos \hat{B}$, $\cos c = \sin b . \cos \hat{C}$.

III. Coordonnées sphériques (rappels)

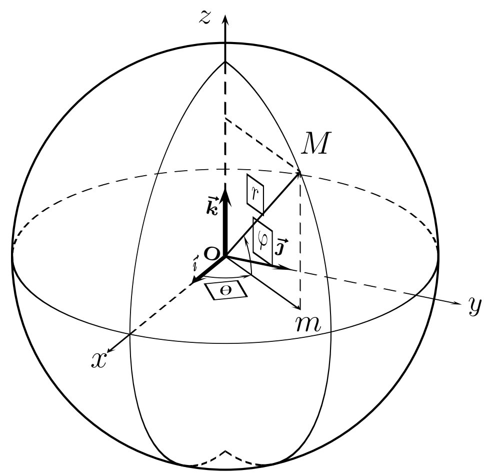
Soit M un point de l'espace de coordonnées cartésiennes $(x\,;\,y\,;\,z)$ dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k})$.

Soit m le projeté orthogonal de M sur le plan de repère $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath})$.

Le point M peut être repéré par la donnée de ses **coordonnées sphériques** :

- la longueur $r = OM$
- sa **longitude** $\theta = \left(\vec{\imath}, \overrightarrow{Om}\right)$
- sa **latitude** $\varphi = \left(\overrightarrow{Om}, \overrightarrow{OM}\right)$.

Si le point considéré est un des pôles ($\varphi = \pm\dfrac{\pi}{2}$) alors on convient que $\theta = 0$.



Propriétés 6 (changement de coordonnées)

$\boxed{x = r\cos\theta\cos\varphi}$ $\boxed{y = r\sin\theta\cos\varphi}$ $\boxed{z = r\sin\varphi}$.

Propriété 7 (Angle au centre)

Soit M et M' deux points d'une sphère de centre O de longitude et latitude respectives θ, φ et θ', φ'. Alors, si l'on note $\alpha = \widehat{MOM'}$ (mesuré en radians), on a :

$$\boxed{\cos\alpha = \cos\varphi\cos\varphi'\cos(\theta-\theta') + \sin\varphi\sin\varphi'}.$$

IV. Application numérique

Méthode :

On commencera par faire l'inventaire des éléments pouvant être trouvés par des considérations géométriques simples.
Le calcul des « côtés » restants du triangle sphérique pourra faire appel aux techniques suivantes
– en utilisant la formule fondamentale (il faut connaître deux côtés et l'angle correspondant)
– en utilisant la formule revue au paragraphe précédent (« angle au centre »)
– en utilisant le produit scalaire si l'on dispose des coordonnées cartésiennes des deux extremités du « côté ».
Remarque : on fera attention au sinus des angles supérieurs à 90°.

Exemple : Extrait du sujet 1993.
« La terre est assimilée à une sphère. On considère deux points A et B de la terre, repérés de la façon suivante :

$$A\left\{\begin{array}{l}\text{latitude} = 45° \text{ Nord}\\ \text{longitude} = 20° \text{ Est}\end{array}\right. \qquad B\left\{\begin{array}{l}\text{latitude} = 30° \text{ Sud}\\ \text{longitude} = 70° \text{ Ouest}\end{array}\right.$$

On appelle C le pôle nord. Déterminer les six éléments du triangle sphérique CAB. »

Réponses

$a = \widehat{BOC} = 90° + 30° = 120° = \dfrac{2\pi}{3}$ rad $\approx 2,094$ rad,
$b = \widehat{AOC} = 90° - 45° = 45° = \dfrac{\pi}{4}$ rad $\approx 0,785$ rad,
$\hat{C} = 70° + 20° = 90°$

La formule fondamentale nous permet ensuite de trouver $c = \widehat{AOB}$:

$$\begin{aligned}\cos c &= \cos\frac{2\pi}{3}.\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{2\pi}{3}.\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}.\cos\frac{\pi}{4}\\ &= -\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

ce qui donne $c \approx 1,932$ rad. Pour les angles $\hat{A}$ et $\hat{B}$, on utilise la formule fondamentale ou (si $\hat{A}$ et $\hat{B}$ sont inférieurs à 90°) celle des sinus. Ainsi, $\cos\hat{A} = \dfrac{\cos a - \cos b\cos c}{\sin b \sin c} \approx 0,377964$ d'où $\hat{A} \approx 1,958$ rad.

De la même façon, on trouve $\hat{B} \approx 0,857$ rad.