Compléments sur les suites

I. Sommes de termes consécutifs

1) Sommes de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Remarques

Pour rappel :

- (u_n) est **arithmétique** s'il existe un nombre r tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$.
- Dans ce cas, il y a une formule explicite : $\boxed{u_n = u_0 + nr}$.

Propriété 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}}$

Démonstration « remarquable »

Soit $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$.

Alors :

$$\begin{array}{ccccccccccccc} S = & 1 & + & 2 & + & \ldots & + & p & + & \ldots & + & n-1 & + & n \\ S = & n & + & n-1 & + & \ldots & + & n-p+1 & + & \ldots & + & 2 & + & 1 \\ \hline 2S = & n+1 & + & n+1 & + & \ldots & + & n+1 & + & \ldots & + & n+1 & + & n+1 \end{array}$$

Chaque terme de la somme $2S$ s'écrit $n+1$ et la somme comporte n termes donc $2S = n \times (n+1)$, d'où la formule.

Exemple 1

$1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = \dfrac{100 \times 101}{2} = 5050.$

Remarque

Grâce à cette propriéte, il est possible de calculer une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique.

Exemple 2

Soit (u_n) arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = 3$.

Calculer la somme $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{100}$.

Réponse :

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{100} &= u_0 + (u_0 + r) + (u_0 + 2r) + \cdots + (u_0 + 100r) \\ &= 101u_0 + r \times (1 + 2 + \cdots + 100) \\ &= 101u_0 + r \times \frac{100 \times 101}{2} \\ &= 101u_0 + 5050r = 101 \times 5 + 5050 \times 3 = 15655. \end{aligned}$$

Exemple 3

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_2 = 10$ et de raison $r = -1$. Calculer la somme des vingt premiers termes de cette suite.

Réponse :

$$\begin{aligned} u_2 + u_3 + u_4 + \cdots + u_{21} &= u_2 + (u_2 + r) + (u_2 + 2r) + \cdots + (u_2 + 19r) \\ &= 20u_2 + r \times (1 + 2 + \cdots + 19) \\ &= 20u_2 + r \times \frac{19 \times 20}{2} \\ &= 20u_2 + 190r = 20 \times 10 + 190 \times (-1) = 10. \end{aligned}$$

2) Sommes de termes consécutifs d'une suite géométrique

Remarques

Pour rappel :

- (u_n) est **géométrique** s'il existe un nombre q tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\boxed{u_{n+1} = q \times u_n}$.
- Dans ce cas, il y a une formule explicite : $\boxed{u_n = q^n \times u_0}$.

Propriété 2

Soit q un réel différent de 1.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$

Remarques

- pour $q = 1$, nous avons $1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = (n + 1) \times 1 = n + 1$;
- la formule n'est pas applicable quand $q = 1$ (division par zéro...).

Démonstration « remarquable »

Soit $S = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n$ avec $q \neq 1$.

Alors :

$$\begin{array}{rccccccccccccc} S = & 1 & + & q & + & q^2 & + & \ldots & + & q^{n-1} & + & q^n & & \\ qS = & & & q & + & q^2 & + & \ldots & + & q^{n-1} & + & q^n & + & q^{n+1} \\ \hline S - qS = & 1 & + & 0 & + & 0 & + & \ldots & + & 0 & + & 0 & + & (-q^{n+1}) \end{array}$$

donc $(1 - q)S = 1 - q^{n+1}$.

Comme $q \neq 1$, nous avons $1 - q \neq 0$ et il suffit de diviser l'égalité précédente par $1 - q$ pour trouver S.

Remarque

$n + 1$ est le nombre de termes dans la somme.

Exemple 4

Calculer $1 + 3 + 9 + 27 + \cdots + 531441$.

Réponse : en cherchant « à tâtons », nous trouvons que $531441 = 3^{12}$ (une fonction vue en classe de Terminale permettrait de trouver ce nombre rapidement...).

Donc $1 + 3 + 9 + 27 + \cdots + 531441 = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{12} = \dfrac{1 - 3^{12+1}}{1 - 3} = 797161$.

Remarque

Grâce à cette propriété, il est possible de calculer une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique.

Exemple 5

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $q = 3$.
Calculer la somme $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{10}$.
Réponse :

$$\begin{aligned}
u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{10} &= u_0 + q\,u_0 + q^2\,u_0 + \cdots + q^{10}\,u_0 \\
&= u_0\left(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{10}\right) = u_0 \times \frac{1-q^{11}}{1-q} \\
&= 5 \times \frac{1-3^{11}}{1-3} = 442865.
\end{aligned}$$

II. Variations d'une suite

1) Suites monotones

Définitions

Soit n_0 un entier. La suite (u_n) est :

— croissante (resp. strictement croissante) à partir de n_0 si et seulement si pour tout $n \geqslant n_0$, on a $u_{n+1} \geqslant u_n$ (resp. $u_{n+1} > u_n$)

— décroissante (resp. strictement décroissante) à partir de n_0 si et seulement si pour tout $n \geqslant n_0$, on a $u_{n+1} \leqslant u_n$ (resp. $u_{n+1} < u_n$)

— constante à partir de n_0 si et seulement si pour tout $n \geqslant n_0$, on a $u_{n+1} = u_n$

Une suite monotone est soit croissante, soit décroissante (strictement monotone si elle est strictement croisante ou strictement décroissante).

Exemple 6

Soit (u_n) définie par $u_n = n^2 - 5n$ pour $n \geqslant 0$.
Un tableau de valeurs donne :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u_n	0	-4	-6	-6	-4	0	6	14	24	36	50	66	84

Il semblerait que (u_n) soit croissante à partir du rang $n = 2$ (et strictement croissante à partir du rang $n = 3$).
Nous verrons dans la suite deux preuves de cette conjecture.

2) Étude des variations

Nous disposons de trois techniques, à utiliser suivant la suite que l'on étudie.

a) Signe de $u_{n+1} - u_n$

Il suffit d'étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$. En effet :

— (u_n) est croissante à partir de n_0 si et seulement si pour tout $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$;

— (u_n) est décroissante à partir de n_0 si et seulement si pour tout $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

Exemple 6

Étudier les variations de la suite (u_n) définie par $u_n = n^2 - 5n$ pour $n \geqslant 0$.
Réponse :

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 5(n+1) - (n^2 - 5n) = 2n - 4$$

donc

$$u_{n+1} - u_n \geqslant 0 \iff 2n - 4 \geqslant 0 \iff n \geqslant 2$$

La suite (u_n) est donc bien croissante à partir du rang $n = 2$.

b) Comparaison de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1

Dans le cas où tous les termes de la suite sont strictement positifs, il est possible de calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et de comparer le résultat à 1.
En effet, pour les suites à termes strictement positifs, $u_{n+1} \geqslant u_n \iff \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \dfrac{u_n}{u_n} \iff \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$.

Notez bien que l'inégalité ne change pas de sens quand je divise par u_n car $u_n > 0$ (et que je peux faire cette division car $u_n \neq 0$).

Remarque

Cette technique s'applique bien aux suites comportant des puissances.

Exemple 7

Étudier les variations de la suite (u_n) définie par $u_n = n^2 - 5n$ pour $n \geqslant 0$.
Réponse :
Si $u_n = \dfrac{2^n}{n}$ pour $n \geqslant 1$ alors u_n reste positif et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} = \frac{2^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{2^n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} \times \frac{n}{n+1} = \frac{2n}{n+1}$$

donc

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 \iff \frac{2n}{n+1} \geqslant 1 \iff 2n \geqslant n+1 \iff n \geqslant 1$$

donc (u_n) est croissante (à partir du rang 1 donc toujours).

c) Étude des variations d'une fonction

Si $u_n = f(n)$ alors nous pouvons étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$.
Par exemple, si f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ alors (u_n) l'est aussi.

Exemple 6

Étudier les variations de la suite (u_n) définie par $u_n = n^2 - 5n$ pour $n \geqslant 0$.
Réponse : la valeur de u_n est écrite en fonction de n (expression explicite du terme général de la suite) c'est-à-dire $u_n = f(n)$ où f peut être définie sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$ par $f(x) = x^2 - 5x$.
J'étudie donc les variations de f :
$f'(x) = 2x - 5$ donc $f'(x) > 0 \iff 2x - 5 > 0 \iff x > \dfrac{5}{2}$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $\left[\dfrac{5}{2}\,;\,+\infty\right[$ et la suite (u_n) est strictement croissante à partir du rang 3.

Remarques

➯ Cette troisième technique ne s'applique qu'aux suites définies explicitement, pas aux suites définies uniquement par récurrence.
➯ Pour les suites définies par récurrence, par exemple par $u_{n+1} = f(u_n)$, il est possible que f soit croissante sans que (u_n) le soit. En fait, si f est croissante, pour que $u_{n+1} \geqslant u_n$, il faudrait que $u_n \geqslant u_{n-1}$, donc que $u_{n-1} \geqslant u_{n-2}$ etc. et donc que $u_1 \geqslant u_0$ ce qui n'est pas forcément le cas.

Exemple 8

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n - 3$. Alors la fonction associée à la relation de récurrence (définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 3$) est croissante mais la suite (u_n) est clairement décroissante.

Remarque

Pour étudier les variations de suites définies par récurrence, il faut souvent faire appel à un type de raisonnement logique appelé « raisonnement par récurrence » (au programme de la spécialité mathématiques de Terminale).

III. Limites de suites (exemples)

Remarque

Nous ne ferons cette année que conjecturer les limites des suites, sans les prouver.

1) Suites ayant une limite infinie

Exemple 6

Soit (u_n) définie par $u_n = n^2 - 5n$ pour $n \geqslant 0$.
Un tableau de valeurs donne :

n	0	10	100	1000	10000	100000
u_n	0	50	9500	995000	99950000	9999500000

Il semblerait que les valeurs de (u_n) dépassent n'importe quelle seuil à partir d'un certain rang.
Par exemple, un tableau de valeurs plus précis suggère que tous les termes de la suite dépasseront un milliard à partir du rang $n = 31626$, ce qui peut être prouvé avec une inéquation du second degré.
Nous dirons que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ ou que sa limite est $+\infty$.
Ceci peut s'écrire ainsi : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Exemple 6

Soit (u_n) définie par $u_n = 5 - 8n$ pour $n \geqslant 0$.
Un tableau de valeurs donne :

n	0	10	100	1000	10000	100000
u_n	0	-75	-795	-7995	-79995	-799995

Il semblerait donc que la suite (u_n) tende vers $-\infty$ donc que sa limite soit $-\infty$.
Ceci peut s'écrire ainsi : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Remarque

Dans le cas des suites, nous pourrions juste écrire $\lim u_n$ ou $\lim(u_n)$, sans préciser que n tend vers $+\infty$. Cependant vous verrez en Terminale les limites de fonctions, dans ce cas, des écritures telles que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to-3} f(x)$ pourront être utilisées.

2) Suites ayant une limite finie

Exemple 9

Soit (u_n) définie par $u_n = 3 - \dfrac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$.
Un tableau de valeurs donne :

n	1	10	100	1000	10000	100000
u_n	2	2,9	2,99	2,999	2,9999	2,99999

Il semblerait ici que les valeurs de (u_n) se rapprochent de 3 quand n tend vers l'infini, autrement dit que la limite de (u_n) est 3.
Ceci peut s'écrire ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

3) Suites n'ayant pas de limite

Exemple 10

Soit (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
Un tableau de valeurs donne :

n	0	1	2	3	4	5
u_n	1	-1	1	-1	1	-1

Les valeurs de (u_n) alternent entre -1 et 1 donc elle ne se rapprochent ni d'un nombre, ni de l'infini.
Nous dirons que la suite (u_n) n'a pas de limite.

Remarques

- des suites telles que $(\cos n)$ ou $(\sin n)$ n'ont pas non plus de limite ;
- une suite qui a une limite finie est dite convergente ;
- une suite non convergente (pas de limite ou une limite infinie) est dite divergente.

4) Cas des suites arithmétiques

Exemple 11

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = -700$ et de raison 5.
Pour passer d'un terme à son suivant, il faut ajouter 5 : la suite aura pour limite $+\infty$.
Plus précisement, $u_n = u_0 + nr = 5\,n - 700$.
Si nous voulons que, par exemple, $u_n > 1000000$, il suffit que $5\,n - 700 > 1000000$ donc que $n > \dfrac{1000000 + 700}{5}$, ce qui se produit à partir du rang $n = 200141$.

Remarque

Les suites arithmétiques ont toujours pour limite soit $+\infty$, soit $-\infty$, suivant le signe de r.
Seules exceptions : les suites de raison $r = 0\ldots$

5) Cas des suites géométriques

Exemple 12

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 700$ et de raison 0,1.
Un tableau de valeurs donne :

n	0	1	2	3	10	100
u_n	700	70	7	0,7	0,00000007	0,000...00007

(la dernière valeur comporte 98 zéros). Il semblerait donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exemple 13

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 700$ et de raison 2.
Un tableau de valeurs donne :

n	0	1	2	3	10	100
u_n	700	1400	2800	5600	716800	$8{,}87 \times 10^{32}$

(la dernière valeur est arrondie). Il semblerait donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exemple 14

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 700$ et de raison -2.
Un tableau de valeurs donne :

n	0	1	2	3	10	100	101
u_n	700	-1400	2800	-5600	716800	$8{,}87 \times 10^{32}$	$-1{,}77 \times 10^{33}$

(les dernières valeurs sont arrondies). Il semblerait donc que cette suite n'ait pas de limite.

Remarque

Pour une suite géométrique de premier terme $u_0 \neq 0$, il y a trois cas de figure :
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_0 \times q^n = 0$;
- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_0 \times q^n = \pm\infty$ (suivant le signe de u_0) ;
- Si $q < -1$ alors (u_n) n'a aucune limite (alternance des signes et valeur absolue qui augmente).

Exemple 15

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = -4$ et de raison 3. Alors $u_n = -4 \times 3^n$.
Comme $q = 3 > 1$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Exemple 16

Trouver la limite de la suite de sommes : $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n}$.

Réponse : d'après la propriété 2 : $S_n = \dfrac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.

Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 2(1-0) = 2$.

Nous pourrions écrire : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 2$.