Suites algébriques et géométriques

I. Rappels sur les pourcentages

Propriété 1

Augmenter une valeur de t % revient à multiplier cette valeur par $1+\dfrac{t}{100}$.

Exemple 1

Le prix d'un article coûtant 50 € est augmenté de 30 %.

Comme $1+\dfrac{30}{100}=1{,}3$ le nouveau prix est alors $50\times 1{,}3=65$ €.

Propriété 2

Diminuer une valeur de t % revient à multiplier cette valeur par $1-\dfrac{t}{100}$.

Exemple 2

Le prix d'un article coûtant 50 € est réduit de 30 %.

Comme $1-\dfrac{30}{100}=0{,}7$ le nouveau prix est alors $50\times 0{,}7=35$ €.

Remarques

— augmenter un prix de 10 % puis réduire le nouveau prix de 10 % revient à multiplier le prix initial par $1{,}1\times 0{,}9=0{,}99$ donc à le réduire de 1 % (on ne retrouve pas le prix de départ...) ;

— augmenter cinq fois un prix de 10 % revient donc à le multiplier par $1{,}1^5=1{,}61051$ donc à l'augmenter d'environ 61 % (pas 50 %...).

II. Suites arithmétiques

1) Définition

Définition

Une suite (u_n) est dite arithmétique si l'on passe d'un terme à son suivant en ajoutant un nombre constant appelé raison et noté r, c'est-à-dire si, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\boxed{u_{n+1}=u_n+r}.$$

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} \dots \xrightarrow{+r} u_n \xrightarrow{+r} u_{n+1} \xrightarrow{+r} \dots$$

Exemple 3

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0=-7$ et de raison 5. Donnez les cinq premiers termes de cette suite.

Réponses : $u_0=-7$; $u_1=u_0+5=-7+5=-2$; $u_2=u_1+5=-2+5=3$; $u_3=u_2+5=3+5=8$; $u_4=u_3+5=8+5=13$.

$$-7 \xrightarrow{+5} -2 \xrightarrow{+5} 3 \xrightarrow{+5} 8 \xrightarrow{+5} 13$$

Exemple 4

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 15 + 20\,n$ pour tout entier naturel n. Prouver que (u_n) est arithmétique.
Réponse : on a $u_{n+1} = 15 + 20(n+1) = 35 + 20n$ d'où $u_{n+1} - u_n = (35 + 20\,n) - (15 + 20\,n) = 20$ donc (u_n) est arithmétique de raison $r = 20$ (et de premier terme $u_0 = 15$).

2) Expression du terme général, d'un terme en fonction d'un autre

Une suite arithmétique est à priori définie par récurrence. Cependant, il est possible de calculer un terme sans avoir à calculer ceux qui précèdent.

Propriété 3

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r alors, pour tous les entiers naturels n et p, on a :

$\boxed{u_n = u_0 + nr}$ $\boxed{u_n = u_1 + (n-1)r}$ $\boxed{u_n = u_p + (n-p)r}$

La dernière formule résume tous les cas possibles.

Exemples 5

- Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 100$ et de raison $r = -0{,}5$.
  On a alors par exemple $u_{50} = u_1 + 49r = 75{,}5$.
- Soit (v_n) une suite arithmétique telle que $u_{30} = 10$ et $u_5 = -2$. Trouver la raison de cette suite.
  Réponse : on a $u_{30} = u_5 + 25r$ donc $r = \dfrac{u_{30} - u_5}{25} = 0{,}48$.

Remarque

Les suites arithmétiques apparaissent naturellement quand on s'intéresse à l'évolution d'un capital à accroissement fixe.

Exemple 6

Un enfant dispose d'un capital de 70 € et économise 10 € par mois. Quel sera ce capital dans 2 ans ?

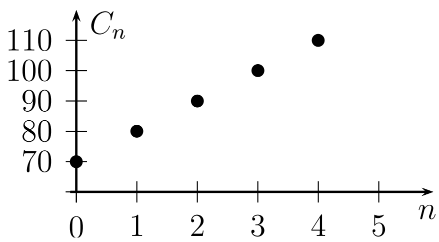
Réponse : comme l'enfant ajoute toujours la même somme d'argent tous les mois, la suite (C_n) (où n est le nombre de mois écoulés) des capitaux est une suite arithmétique de premier terme $C_0 = 70$ et de raison $r = 10$.
Le capital dans 2 ans sera alors $C_{120} = C_0 + 120 \times 10 = 1270$ €.

Remarque

La relation $u_n = u_0 + nr$ montre que les suites arithmétiques sont reliées aux fonctions affines.

Exemple 7

Dans l'exemple précédent, $C_n = C_0 + n \times r = 70 + 10\,n = 10\,n + 70$, qui est de la forme $a\,n + b$.
La représentation graphique (partielle) de cette suite (C_n) est donc une succession de points alignés :



III. Suites géométriques

1) Définition

Définition

Une suite (u_n) est dite **géométrique** si l'on passe d'un terme à son suivant en le multipliant par un nombre constant appelé **raison** et noté q, c'est-à-dire si, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{u_{n+1} = q \times u_n}$$

$$u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \xrightarrow{\times q} \dots \xrightarrow{\times q} u_n \xrightarrow{\times q} u_{n+1} \xrightarrow{\times q} \dots$$

Exemple 8

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = -7$ et de raison -2. Donnez les cinq premiers termes de cette suite.

Réponses : $u_0 = -7$; $u_1 = u_0 \times (-2) = -7 \times (-2) = 14$; $u_2 = u_1 \times (-2) = 14 \times (-2) = -28$; $u_3 = u_2 \times (-2) = -28 \times (-2) = 56$; $u_4 = u_3 \times (-2) = 56 \times (-2) = -112$.

$$-7 \xrightarrow{\times(-2)} 14 \xrightarrow{\times(-2)} -28 \xrightarrow{\times(-2)} 56 \xrightarrow{\times(-2)} -112$$

Exemple 9

Prouver que la suite (u_n) définie par $u_n = -2 \times 5^n$ est géométrique.

Réponse : calculons le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ (en remarquant que $u_n = -2 \times 5^n \neq 0$ pour tout n) :

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{-2 \times 5^{n+1}}{-2 \times 5^n} = \dfrac{5^n \times 5^1}{5^n} = 5$ donc (u_n) est une suite géométrique de raison 5 et de premier terme $u_0 = -2 \times 5^0 = -2 \times 1 = -2$.

2) Expression du terme général

Propriété 3

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q. Alors, pour tous les entiers naturels n et p, on a :

$\boxed{u_n = q^n u_0}$ $\boxed{u_n = q^{n-1} u_1}$ $\boxed{u_n = q^{n-p}.u_p}$

La dernière formule résume tous les cas possibles.

Exemples 10

- Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 35$ et de raison $q = 2$.
  On a alors, par exemple, $u_{10} = u_0 \times 2^{10} = 35 \times 1024 = 35840$.
- Soit (v_n) une suite géométrique telle que $u_5 = 16$ et $u_{10} = -512$. Trouver la raison de cette suite.
  Réponse : $u_{10} = u_5 \times q^5$ donc $q^5 = \dfrac{u_{10}}{u_5} = \dfrac{-512}{16} = -32$ d'où $q = -2$.

Remarque

Les suites géométriques apparaissent naturellement quand on s'intéresse à l'évolution d'un capital à taux fixe.

Exemple 11

Un capital de 2000 € est placé sur un compte bancaire qui rapporte 2 % d'intérêts tous les ans. Quel sera ce capital dans 10 ans ?

Réponse : comme augmenter de 2 % revient à multiplier par $1 + \dfrac{2}{100} = 1{,}02$, la suite (C_n) des capitaux est une suite géométrique de premier terme $C_0 = 2000$ et de raison $q = 1{,}02$.

Le capital dans 10 ans sera alors $C_{10} = C_0 \times 1{,}02^{10} \simeq 2438$ €.