Suites numériques

I. Notion de suite numérique

1) Rappels

Définitions

- On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, c'est-à-dire l'ensemble des entiers positifs ou nuls :
$$\boxed{\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}}.$$
- On définit une fonction numérique f sur un ensemble $\mathscr{D}$ (souvent un intervalle ou une réunion d'intervalles) en associant à un x quelconque de $\mathscr{D}$, un réel et un seul, appelé image de x et noté $f(x)$.

2) Définitions et notations

Définition

Une suite numérique u est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ (ou parfois sur $\mathbb{N}$ privé de quelques entiers : 0 ; 1 ou autres) et à valeurs réelles.

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u(n) \end{array}$$

Remarques

- $u(n)$ sera plus simplement noté u_n. C'est le terme d'indice n de la suite u.
- Une suite numérique est une succession de nombres numérotés avec des entiers
à partir du rang 0 : $u_0, u_1, u_2, \dots$
ou à partir du rang 1 : $u_1, u_2, u_3, \dots$
(ou du rang 2, etc.)
- La suite u est plus souvent notée (u_n) ou encore, plus précisément, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou, suivant les cas, $(u_n)_{n\geqslant 1}$, etc.).
La notation $(u(n))$ est aussi valable mais rarement utilisée.

premier terme de la suite (u_n) — un terme quelconque de la suite (u_n)

$$u_0, u_1, u_2, u_{\boxed{3}}, u_3, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots$$

indice (ou rang) du 4^e terme de la suite (u_n)

Exemple 1

Soit la suite (u_n) des nombres pairs 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; …
Le premier terme 2 peut être noté u_1, le second u_2, le troisième u_3, etc. :
$$u_1 = 2,\ u_2 = 4,\ u_3 = 6,\ \dots$$
Le **terme général** de cette suite est alors $u_n = 2n$.
On aurait pu aussi commencer la numérotation à zéro :
$$u_0 = 2,\ u_1 = 4,\ u_2 = 6,\ \dots$$
ce qui donnerait alors $u_n = 2(n+1)$.

Comment écrire l'expression de u_{n+1} connaissant celle de u_n.

Il suffit de remplacer n par $n+1$ dans l'expression de u_n.

Exemple 2

Si $u_n = 2n$ alors $u_{n+1} = 2(n+1) = 2n+2$ et $u_{n+2} = 2(n+2) = 2n+4$.

Remarques

- Ceci sera utile cette année pour étudier la nature ou les variations d'une suite.
- Si un terme est noté u_n alors le terme suivant est u_{n+1}, pas $u_n + 1$!
  Attention donc à écrire correctement les indices...

Exemple 3

Si $u_n = 2n+3$ alors $u_n + 1 = (2n+3)+1 = 2n+4$ tandis que $u_{n+1} = 2(n+1)+3 = 2n+5$.

II. Différentes façons de définir une suite

1) Suites définies explicitement

Définition

Une suite est définie explicitement si on connaît la relation entre n et u_n, de la forme $u_n = f(n)$ où f est connue.

Exemple 4

- $u_n = \dfrac{n+1}{n-1}$ pour tout $n \neq 1$. Alors, par exemple, $u_6 = \dfrac{7}{5}$.
- La suite (v_n) des nombres pairs $(2\,;\,4\,;\,6\,;\,\dots)$ peut être vue comme une suite définie explicitement : $v_n = 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Suites définies par récurrence

Définition

Une suite est définie par récurrence si on connaît son premier terme u_0 (ou u_1, ...) et la relation entre un terme u_n et son suivant u_{n+1} (de la forme $u_{n+1} = g(u_n)$)

$$u_0 \xrightarrow{g} u_1 \xrightarrow{g} u_2 \xrightarrow{g} \dots \xrightarrow{g} u_n \xrightarrow{g} u_{n+1} \xrightarrow{g} \dots$$

Exemple 5

- Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = 2u_n - 3$ (ici, $g(x) = 2x - 3$).
  Pour $n = 0$, on trouve $u_1 = 2u_0 - 3 = 1$, $u_2 = 2u_1 - 3 = -1$, $u_3 = 2u_2 - 3 = -5$, $u_4 = 2u_3 - 3 = -13$, $u_5 = 2u_4 - 3 = -29$, $u_6 = 2u_5 - 3 = -61$, etc.
- La suite (v_n) des nombres pairs $(2\,;\,4\,;\,6\,;\,\dots)$ peut être vue comme une suite définie par récurrence : son premier terme est $v_0 = 2$ et la relation de récurrence est $v_{n+1} = v_n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarques

- On ne peut pas calculer directement un terme quelconque de la suite sans avoir calculé tous les précédents.
- Il existe d'autres formes de récurrence, comme dans le cas de la suite de Fibonacci où un terme se calcule à partir des deux précédents ($u_0 = u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$).
- Une relation de récurrence ne permet pas toujours de définir une suite.

Exemple 6

Si $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n + 1}$ alors $u_1 = \dfrac{1}{u_0 + 1} = -1$ et u_2 n'existe pas.

3) Suites définies par un algorithme

Exemple 7

Soit (u_n) la suite des sommes des entiers de 0 à n :

$$u_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n.$$

L'algorithme suivant permet le calcul d'un terme de la suite, ici u_{20} :

Langage naturel	Script en Python
$n \leftarrow 20$	
$u \leftarrow 0$	`n = 20`
pour $i \leftarrow 1$ **à** n	`u = 0`
faire	`for i in range(1,n+1):`
$\quad u \leftarrow u + i$	`    u = u + i`
fin	

La variable « u » contiendra la valeur de u_{20} à la fin de l'algorithme.
Il suffit ensuite de changer la première ligne de l'algorithme pour obtenir un autre terme.

III. Représentation graphique

Comment représenter graphiquement une suite (u_n).

Il suffit de placer les points d'abscisse n et d'ordonnée u_n.

Exemple 8

Représentation graphique (partielle) de la suite (u_n) définie par $u_n = \sqrt{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.