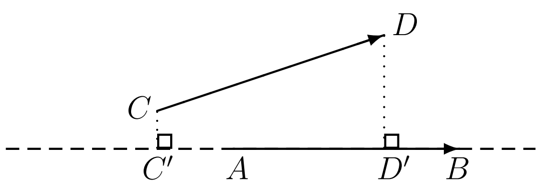
Compléments sur le produit scalaire

I. Rappels

Voilà les trois définitions du produit scalaire vues cette année :

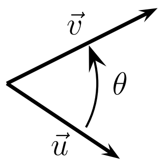
Définition

Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs. Soient C' et D' les projections orthogonales de C et D sur la droite (AB). Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ est :



$$\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{CD} = \begin{cases} AB.C'D' & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{C'D'} \text{ ont le même sens} \\ -AB.C'D' & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{C'D'} \text{ ont un sens contraire} \end{cases}$$

Définition



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta$$

Définition

Dans un repère orthonormé, si $\vec{u}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix}$ alors $\boxed{\vec{u}.\vec{v} = XX' + YY' + ZZ'}$.

II. Carré scalaire et applications

1) Définition

Définition

Le nombre $\vec{u}.\vec{u}$ peut être noté $\vec{u}^{\,2}$ (carré scalaire de $\vec{u}$).

Propriété 1

Pour tout vecteur $\vec{u}$: $\boxed{\vec{u}^{\,2} = ||\vec{u}||^2}$.

Démonstration

En effet, $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos 0 = \|\vec{u}\|^2 \times 1 = \|\vec{u}\|^2$.

Exemple 1

Si un vecteur $\vec{u}$ a pour norme 6 alors $\vec{u}^{\,2} = 6^2 = 36$.

Remarque

C'est un des seuls cas où l'on peut remplacer un vecteur par sa longueur.

2) Développement de $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$

Propriété 2

Pour tous les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\boxed{\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2}$.

Démonstration

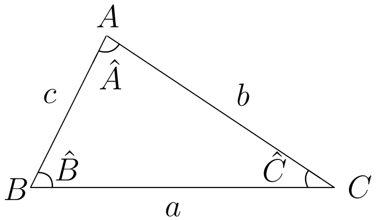
$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= \vec{u}^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \end{aligned}$$

Remarques

➭ cette propriété ressemble à une identité remarquable mais notez bien la présence d'un produit scalaire ;
➭ remarquez qu'en isolant ce produit scalaire, nous trouvons :
$\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$;
➭ cette formule constitue une quatrième (et dernière !) définition du produit scalaire.

3) Formule d'Al-Kashi

Les notations suivantes sont souvent utilisées : $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$;
$\hat{A}$ est une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$, $\hat{B}$ de l'angle $\widehat{ABC}$ et $\hat{C}$ de l'angle $\widehat{ACB}$ (de sorte que le côté de longueur c soit celui qui est « en face » de l'angle $\hat{C}$).



Théorème 1

Formule d'Al-Kashi :
$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2b.c.\cos\hat{A}}$$

Démonstration « remarquable »

$$\begin{aligned}
a^2 = BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 &= \left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)^2 = \overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2\\
&= BA^2 + 2\left(-\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{AC} + AC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\
&= c^2 + b^2 - 2\times AB\times AC\times\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\\
&= c^2 + b^2 - 2\times c\times b\times\cos\hat{A}.
\end{aligned}$$

Remarques

➭ si je connais deux côtés et l'angle entre les deux alors je peux calculer le troisième côté ;
➭ si je connais les trois côtés alors je peux calculer n'importe quel angle ;
➭ le triangle étant quelconque, la formule d'Al-Kashi peut aussi s'écrire $b^2 = a^2 + c^2 - 2a.c.\cos\hat{B}$ ou $c^2 = a^2 + b^2 - 2a.b.\cos\hat{C}$.
➭ si le triangle est rectangle en A, la formule d'Al-Kashi devient $a^2 = b^2 + c^2 - 2b.c.\cos 90° = b^2 + c^2 - 2\times b\times c\times 0 = b^2 + c^2$: nous retrouvons là la relation de Pythagore, qui n'est donc qu'un cas particulier de la formule d'Al-Kashi ; pour cette raison cette dernière est parfois appelée formule de Pythagore généralisée.

Exemple 2

Soit ABC un triangle tel que $AB = 5$, $BC = 4$ et $\widehat{CBA} = 60°$.
Calculez une valeur approchée de AC et des autres angles du triangle.

Réponses :

Avec les notations, $c = 5$, $a = 4$ et $\hat{B} = 60°$ et nous cherchons b.

$$\begin{aligned}
b^2 &= a^2 + c^2 - 2a.c.\cos\hat{B} = 16 + 25 - 2\times 4\times 5\times\cos 60°\\
&= 41 - 20 = 21
\end{aligned}$$

donc $AC = \sqrt{21} \simeq 4{,}58$.
Calculons maintenant l'angle $\hat{A}$ en écrivant la formule d'Al-Kashi ainsi : $a^2 = b^2 + c^2 - 2b.c.\cos\hat{A}$ donc
$\cos\hat{A} = \dfrac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc} = \dfrac{16 - 21 - 25}{-2\times\sqrt{21}\times 5} = \dfrac{3}{\sqrt{21}}$
d'où $\hat{A} = \arccos\dfrac{3}{\sqrt{21}} \simeq 49{,}11°$.
Enfin, $\hat{C} = 180 - \hat{A} - \hat{B} \simeq 70{,}89°$.

III. Transformation de $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ et application

Propriété 3

Soit $[AB]$ un segment de milieu I.
Alors, pour tout point M, nous avons :

$$\boxed{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}}.$$

Démonstration « remarquable »

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &=^{(1)} \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) \\
&=^{(2)} \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} \\
&=^{(3)} \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} \\
&=^{(4)} MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA} \cdot \left(-\overrightarrow{IA}\right) \\
&=^{(5)} MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}) - \overrightarrow{IA}^2 \\
&=^{(6)} MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \vec{0} - IA^2 \\
&=^{(7)} MI^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = MI^2 - \frac{AB^2}{4}
\end{aligned}$$

(1) relation de Chasles
(2) distributivité du produit scalaire
(3) commutativité du produit scalaire ($\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$)
(4) propriété 1 et I milieu de $[AB]$ donc $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$
(5) factorisation du produit scalaire
(6) I milieu de $[AB]$ donc $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ et propriété 1
(7) I milieu de $[AB]$ donc $IA = \dfrac{AB}{2}$.

Propriété 4

Soit $[AB]$ un segment.
L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

Démonstration « remarquable »

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 &\iff MI^2 - \frac{AB^2}{4} = 0 \iff MI^2 = \frac{AB^2}{4} \\
&\iff IM = \frac{AB}{2} \\
&\iff M \text{ est sur le cercle de centre } I\text{, de rayon } \frac{AB}{2} \\
&\iff M \text{ appartient au cercle de diamètre } [AB].
\end{aligned}$$

Remarque

Nous retrouvons un théorème de géométrie bien connu, attribué à Thalès : « un point M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si le triangle AMB est rectangle en M » (j'exclus ici les points A et B pour simplifier).