Produit scalaire de deux vecteurs

I. Rappels de formules (dans le plan)

Propriétés 1

- Relation de Chasles : $\boxed{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}}$
- $\boxed{\overrightarrow{AB} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}}$

Remarque

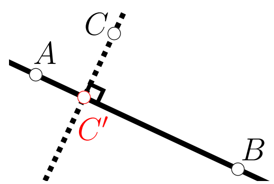
Dans l'espace, les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$.

II. Définition par projection orthogonale

1) Projection orthogonale

Définition

Soit une droite (AB) et un point C. Le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) est le point C', intersection de (AB) et de la perpendiculaire à (AB) passant par C.



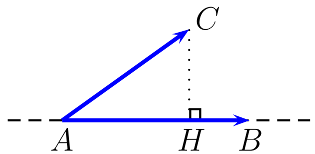
2) Produit scalaire par projection orthogonale

Remarque

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs alors il existe trois points A, B, C tels $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$. Un vecteur est un objet « mobile » ; nous pouvons toujours dire que deux vecteurs partent du même point.

Définition

Soient A, B, C trois points et H le projeté orthogonal de C sur (AB). Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est :

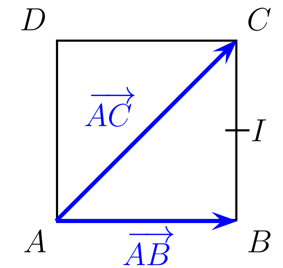


$$\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\begin{cases} AB \times AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ ont le même sens} \\ -AB \times AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ ont un sens contraire} \end{cases}}$$

Exemple 1

Soit $ABCD$ un carré de côté 3 et I le milieu de $[BC]$.

Calculer les trois produits scalaires $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{AD}$.



Réponses :

- Pour $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$: je projette le vecteur $\overrightarrow{AC}$ (qui est oblique) sur le vecteur $\overrightarrow{AB}$ qui est horizontal ; le projeté de A est alors A et celui de C est B donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AB=9$.
- Pour $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}$: je projette le vecteur $\overrightarrow{BD}$ (qui est oblique) sur le vecteur $\overrightarrow{AB}$ qui est horizontal ; le projeté de B est alors B et celui de D est A donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=-AB\times BA=-9$.
- Pour $\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{AD}$: je projette le vecteur $\overrightarrow{DI}$ (qui est oblique) sur le vecteur $\overrightarrow{AD}$ qui est vertical ; le projeté de D est alors D et celui de I est le milieu J de $[AD]$ donc $\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{AD}=-DJ\times AD=-4{,}5$.

Remarques

- le produit scalaire n'est pas en général le produit des longueurs (dans l'exemple précédent, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\neq AB\times AC$) ;
- le produit scalaire n'a pas de représentation géométrique : ce n'est ni une longueur, ni un angle, ni une aire…

3) Cas des vecteurs colinéaires

Remarques

➩ si A, B, C sont alignés alors $H = C$;
➩ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de même sens ; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AC$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de sens contraire ;
➩ autrement dit :
si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$;
si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraire alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

Exemple 1

$\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BC} = BI \times BC = 4{,}5$ et $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{CI} = -BI \times CI = -2{,}25$.

4) Cas des vecteurs orthogonaux

Définition

Deux vecteurs du plan $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux ($\vec{u} \perp \vec{v}$) si les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Remarques

Dans l'espace, $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ est orthogonal à $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ si $(AB) \perp (AC)$.

Propriété 2

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$$

Remarques

➩ nous verrons que ceci permet parfois de prouver rapidement et efficacement l'existence d'un angle droit ;
➩ le vecteur nul est considéré comme orthogonal à tous les vecteurs ;
➩ contrairement à la multiplication usuelle,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \not\Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0}.$$

Exemple 1

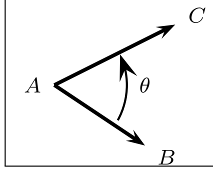
Dans l'exemple 1, nous voyons que :
$(AB) \perp (AD)$ donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$; $(AC) \perp (BD)$ donc $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

III. Définition avec normes et angle

Propriété 3

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)}$$

(AB et AC désignent les longueurs des vecteurs).



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\theta$$

Exemple 1

Voici une autre façon de calculer $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC}$ dans l'exemple 1 :
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos 45° = 3 \times 3\sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 9$.

Remarque

Le cosinus d'un angle compris entre 0 et 90° est positif et celui d'un angle compris entre 90° et 180° est négatif, donc nous voyons que :
- $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \iff (\vec{u}, \vec{v})$ est aigu ;
- $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \iff (\vec{u}, \vec{v})$ est obtus ;
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff (\vec{u}, \vec{v}) = 90°$.

Exemple 1

Dans l'exemple 1,
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$ car $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CB}$;
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 9 > 0$ et l'angle $\widehat{BAC}$ est aigu ;
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -9 < 0$ donc l'angle entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BD}$ est obtus.

Remarque

Pour tous les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls, nous pouvons écrire que :

$$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||}.$$

Exemple 1

Donner une mesure de l'angle entre $\overrightarrow{DI}$ et $\overrightarrow{AD}$.

Réponse :

nous avons vu que $\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{AD} = -4{,}5$ or $DI = \sqrt{3^2+1{,}5^2} = 3\sqrt{1{,}25}$ et $AD = 3$ donc $\cos(\overrightarrow{DI},\overrightarrow{AD}) = \dfrac{-4{,}5}{3\sqrt{1{,}25}\times 3} \simeq -0{,}447$ d'où $(\overrightarrow{DI},\overrightarrow{AD}) \simeq \arccos(-0{,}447) \simeq 116{,}57°$.

(remarque : il était possible de trouver cette réponse avec de la trigonométrie de collège)

IV. Quelques propriétés du produit scalaire

Propriété 4

Le produit scalaire est symétrique : pour tous les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$$

Propriétés 5

Le produit scalaire est bilinéaire : pour tous les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et tout réel k :

- $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
- $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$
- $\vec{u}\cdot(k\vec{v}) = (k\vec{u})\cdot\vec{v} = k\,(\vec{u}\cdot\vec{v})$

Remarque

La formule $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ rappelle bien sûr la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Exemple 1

Recalculer $\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{AD}$ sans utiliser la projection orthogonale.

Réponse :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{AD} &=^{(1)} (\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CI})\cdot\overrightarrow{AD} =^{(2)} \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{AD}\\ &=^{(3)} 0 - CI\times AD = -1{,}5\times 3 = -4{,}5.\end{aligned}$$

(1) relation de Chasles ; (2) distributivité ;
(3) $\overrightarrow{DC}\perp\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires et de sens contraires.

Remarque

Nous pouvons toujours transformer les calculs pour n'avoir affaire qu'à des vecteurs horizontaux ou verticaux, ce qui nous amène à introduire deux directions, donc un repère…

V. Calculs en repère orthonormé

1) Calcul du produit scalaire

Propriété 6

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}X'\\Y'\\Z'\end{pmatrix}$ dans une base orthonormée de l'espace $\left(\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k}\right)$ ($\vec{\imath}\perp\vec{\jmath}$, $\vec{\imath}\perp\vec{k}$, $\vec{\jmath}\perp\vec{k}$ et $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ ont pour longueur 1).

Alors : $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = XX'+YY'+ZZ'}$.

Remarque

Pour deux vecteurs du plan (donc ayant deux coordonnées), la formule devient bien sûr $\vec{u}\cdot\vec{v} = XX'+YY'$.

Exemple 2

Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$, où $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$.

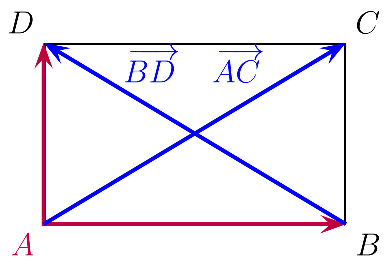
Réponse : $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\times 3 + 0\times 3 = 6$.

Remarques

➾ le critère d'orthogonalité s'écrit, dans une base orthonormée : $\vec{u}\perp\vec{v} \iff XX' + YY' + ZZ' = 0$.
➾ la formule de la propriété 6 ne fonctionne que dans un repère orthonormé.

Exemple 3

Soit $ABCD$ un rectangle de dimensions 5 et 3.
Dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$, les coordonnées des points sont : $A\ (0\,;0)$; $B\ (1\,;0)$; $C\ (1\,;1)$; $D\ (0\,;1)$.



Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont donc :
$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x_C - x_A\\ y_C - y_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}x_D - x_B\\ y_D - y_B\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.
Ici, $XX' + YY' = 1\times(-1) + 1\times 1 = 0$ alors que $\overrightarrow{AC} \not\perp \overrightarrow{BD}$ donc $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} \neq XX' + YY'$ (car le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$ n'est pas orthonormé).

Remarque

Attention : X, X', Y, Y', Z, Z' sont des coordonnées de vecteurs, pas des coordonnées de points !

Exemple 4

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$, soient les points : $A\ (-2\,;1)$; $B\ (3\,;-6)$; $C\ (-1\,;-5)$. Calculer $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}$.

Réponse :
Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont :
$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x_C - x_A\\ y_C - y_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}x_B - x_C\\ y_B - y_C\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$.
Donc $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB} = XX' + YY' = 1\times 4 + (-6)\times(-1) = 10$.

Remarques

➾ nous avons maintenant trois définitions du produit scalaire ce qui permet, en jouant avec celles-ci, de déterminer des angles, des longueurs, ou de réaliser des projections ;
➾ avant cela, il nous faut pouvoir calculer la norme d'un vecteur.

2) Calcul de la norme d'un vecteur

Définition

La norme d'un vecteur $\vec{u}$ est sa longueur. Elle est notée $\|\vec{u}\|$.

Propriété 7

Soit $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}$ dans une base orthonormée de l'espace $(\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$. Alors : $\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$.

Démonstration

Pour tout $\vec{u}$, nous avons : $\vec{u}.\vec{u} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{u}|| \times \cos 0 = ||\vec{u}||^2$.
De plus, $\vec{u}.\vec{u} = X\times X + Y\times Y + Z\times Z = X^2+Y^2+Z^2$.
Donc $X^2+Y^2+Z^2 = ||\vec{u}||^2$ d'où $||\vec{u}|| = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$.

Remarques

- en deux dimensions, cette formule s'écrit $||\vec{u}|| = \sqrt{X^2+Y^2}$;
- vous aurez bien sûr reconnu la formule de Pythagore...

Exemple 5

Si $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix}$ dans une base orthonormée de l'espace alors :
$\|\vec{u}\| = \sqrt{(-2)^2+3^2+(-1)^2} = \sqrt{14}$.

Remarque

Comme $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$, la distance entre deux points est $\boxed{AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}}$.

Exemple 6

Dans un repère orthonormé, calculez la distance entre $A\ (2\,;\,-2\,;\,3)$ et $B\ (0\,;\,-3\,;\,1)$.

Réponse :

Soit je calcule directement la distance :

$$\begin{aligned}AB &= \sqrt{(0-2)^2+(-3-(-2))^2+(1-3)^2}\\ &= \sqrt{(-2)^2+(-1)^2+(-2)^2} = \sqrt{9} = 3.\end{aligned}$$

Soit je calcule d'abord les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ puis sa norme : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0-2\\-3-(-2)\\1-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-1\\-2\end{pmatrix}$

donc $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-2)^2+(-1)^2+(-2)^2} = \sqrt{9} = 3$.

VI. Quelques applications du produit scalaire

1) Calculs de mesures d'angles

Exemple 7

Soient $A\ (1\,;\,-2)$, $B\ (-1\,;\,0)$ et $C\ (2\,;\,5)$. Donner une mesure en degrés de l'angle $\widehat{BAC}$ (on suppose que l'on est dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$).

Réponse : l'angle $\widehat{BAC}$ est l'angle entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Or :
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A=-1-1=-2\\y_B-y_A=0-(-2)=2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x_C-x_A=2-1=1\\y_C-y_A=5-(-2)=7\end{pmatrix}$
donc $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = -2\times1+2\times7 = 12$.

Comme $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$, je calcule :
$AB = \sqrt{(-2)^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ et $AC = \sqrt{1^2+7^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$;
donc $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{12}{2\sqrt{2}\times5\sqrt{2}} = \dfrac{3}{5}$ d'où $\widehat{BAC} = \arccos\dfrac{3}{5} \simeq \boxed{53{,}13°}$.

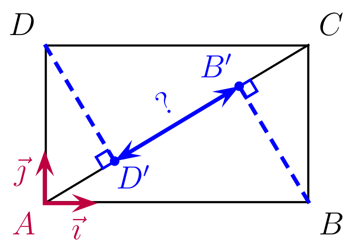
Remarques

- pensez à prendre deux vecteurs partant du sommet de l'angle, par exemple, l'angle entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CA}$ n'est pas l'angle $\widehat{BAC}$!
- vérifiez vos calculs (coordonnées de vecteurs, longueurs, produit scalaire puis enfin angle) au fur et à mesure avec une figure ou avec Geogebra.

2) Calculs de longueurs

Exemple 8

Soit $ABCD$ un rectangle de dimensions 5 et 3.
Soient D' et B' les projetés orthogonaux respectifs de D et B sur la droite (AC).
Calculer la longueur $D'B'$.



Réponse : en utilisant la définition du produit scalaire par projection orthogonale, il vient : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} = AC \times D'B'$ donc $D'B' = \dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}}{AC}$.

Il ne reste plus qu'à calculer AC (avec Pythagore) et $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}$, avec les coordonnées des vecteurs.

Plaçons nous dans un repère orthonormé $(A;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (cf. figure), les coordonnées des points sont : $A\ (0\,;\,0)$; $B\ (5\,;\,0)$; $C\ (5\,;\,3)$; $D\ (0\,;\,3)$.
Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont donc :

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{DB}\begin{pmatrix} x_B - x_D \\ y_B - y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

J'en déduis que

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} = 5\times 5 + 3\times(-3) = 16$$

et que

$$AC = \sqrt{5^2+3^2} = \sqrt{34}$$

donc

$$D'B' = \frac{16}{\sqrt{34}} = \frac{8\sqrt{34}}{17} \simeq 2{,}74.$$

3) Recherche d'une équation de droite

Remarque

Nous pouvons utiliser le produit scalaire pour trouver des équations de droites (ou de plans) perpendiculaires à une autre droite.

Exemple 9

Soient, dans un repère orthonormé, les points $A\ (2\,;\,0)$, $B\ (-1\,;\,3)$ et $C\ (5\,;\,-2)$. Déterminez une équation de la droite perpendiculaire à (AC) et passant par B (donc de la hauteur du triangle ABC issue de B).

Réponse :
Appelons (d) cette droite.
Soit $M\ (x\,;\,y)$ un point. Alors :

$$M \in (d) \iff \overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{AC} \iff \overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AC} = 0.$$

Or les coordonnées des deux vecteurs sont :

$$\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-3 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

donc

$$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AC} = 3(x+1) - 2(y-3) = 3x - 2y + 9.$$

Une équation de (d) est donc $3x - 2y + 9 = 0$.

Remarque

Bien sûr, pensez à vérifier la réponse avec un logiciel tel que Geogebra…