Probabilités conditionnelles

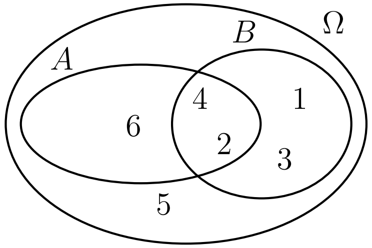
I. Rappels de seconde

1) Événements

Exemple 1

Je lance une fois un dé à six faces numérotées de 1 à 6 et je m'intéresse au chiffre X apparaissant sur la face du dessus.

Il y a ici six éventualités (six résultats possibles) et l'ensemble de toutes les éventualités est l'univers $\Omega = \{1{,}2{,}3{,}4{,}5{,}6\}$.
Un événement est un ensemble d'éventualités, son **cardinal** est le nombre d'éventualités qui y sont contenues.
Par exemple soit l'événement A : « X est pair ». Alors A peut être représenté par l'ensemble $\{2{,}4{,}6\}$ et on a $\text{card}\, A = 3$.
De même, l'événement B : « X est inférieur à 5 » peut s'écrire $B = \{1{,}2{,}3{,}4\}$ et on a $\text{card}\, B = 4$.



Un événement peut être **impossible** : par exemple, « $X = 7$ » est impossible, on note cet événement $\emptyset$.
Un événement peut être **certain** : par exemple, « X est un entier » est certain et contient toutes les éventualités. Cet événement est l'univers Ω.

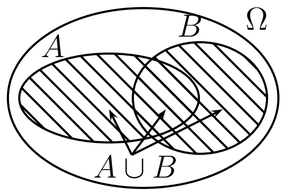
Exemple 2

Je lance le dé deux fois. Les éventualités peuvent alors être représentées sous forme de couples $(a;b)$ (a : 1er chiffre, b : second chiffre). Il y a alors $6 \times 6 = 36$ éventualités.

2) Opérations sur les événements

a) Réunion et intersection de deux événements

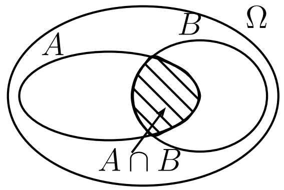
La réunion des événements A et B, notée $A \cup B$ (« A union B »), est l'ensemble des éventualités qui sont dans A **ou** dans B.



Exemple 1

$\{2{,}4{,}6\} \cup \{1{,}2{,}3{,}4\} = \{1{,}2{,}3{,}4{,}6\}$.

L'intersection des événements A et B, notée $A \cap B$ (« A inter B ») est l'ensemble des éventualités qui se trouvent dans A **et** dans B.



Exemple 1

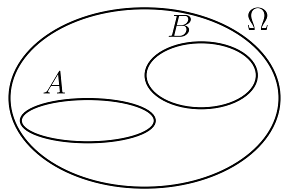
$\{2{,}4{,}6\} \cap \{1{,}2{,}3{,}4\} = \{2{,}4\}$.

Exemple 3

On choisit au hasard une personne.
Soient les événements A : « la personne est une femme » ; B : « la personne est adulte » et C : « la personne est du 3ᵉ âge ». $A \cup B$ est l'événement « la personne est une femme ou une personne adulte ».
$A \cap B$ est l'événement « la personne est une femme adulte ».
Remarquons que dans cet exemple $B \cap C = C$ et que $B \cup C = B$.

b) Evénements incompatibles

Deux événements A et B sont incompatibles (ou disjoints) si $A \cap B = \emptyset$ donc s'il est impossible que A et B se réalisent en même temps.

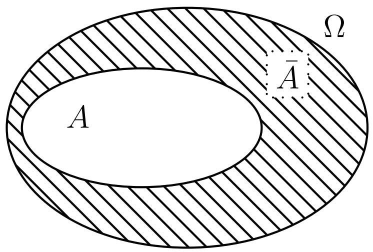


Exemple 1

« X vaut 5 » et « X est pair » sont incompatibles.

c) Evénement contraire

Soit A un événement. L'événement contraire de A, noté $\bar{A}$, est l'événement constitué des éventualités qui ne sont pas dans A.



Exemple 1

Le contraire de l'événement $A = \{2{,}5\}$ est $\bar{A} = \{1{,}3{,}4{,}6\}$.

Remarque

Deux événements contraires sont incompatibles mais deux événements incompatibles ne sont pas forcément contraires. Ainsi, $A = \{2\,;\,5\}$ et $B = \{1\,;\,3\}$ sont incompatibles mais non contraires.

3) Probabilité d'un événement

a) Définitions

Définition

On définit une probabilité sur l'univers Ω en associant à tout événement A un nombre $P(A)$ tel que :

$$\boxed{P(\Omega) = 1}$$

$$\boxed{\text{Si } A \cap B = \emptyset \text{ alors } P(A \cup B) = P(A) + P(B)}.$$

Définitions

Lorsque les éventualités ont la même probabilité (exemple : lancer d'un dé non truqué), on dit que l'on est dans une situation d'**équiprobabilité**.

b) Propriétés des probabilités

Propriété 1

Si A est un ensemble fini alors $P(A)$ est la somme des probabilités des éventualités contenues dans A.

Exemple 1

Supposons que le dé soit truqué, avec une chance sur deux d'avoir un 6, les autres résultats étant équiprobables.
On a alors le tableau suivant (ou loi de probabilité) :

Résultat	1	2	3	4	5	6
Probabilité	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/2

La probabilité d'obtenir un nombre pair est alors :
$P(2) + P(4) + P(6) = \dfrac{7}{10}$.

Propriété 2

Dans un cas d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est :

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{nombre d'éventualités dans } A}{\text{nombre total d'éventualités}} = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}}$$

(nombre de cas favorables / nombre de cas possibles).

Exemple 1

Si le dé n'est pas truqué, la probabilité d'obtenir un nombre pair est $\dfrac{1}{2}$ car il y a 6 cas possibles (nombre total d'éventualités) et 3 cas favorables (nombre d'éventualités réalisant « chiffre pair »).

Propriétés 3

Soient A et B deux événements. On admet les propriétés suivantes :

$$\boxed{P(\emptyset) = 0}$$

Si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$

$$\boxed{0 \leq P(A) \leq 1}$$

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

$$\boxed{P\left(\bar{A}\right) = 1 - P(A)}.$$

Remarque

Si A et B sont incompatibles alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Exemple 1

Supposons que le dé est non truqué. Soient les événements A = « le chiffre est pair », B = « le chiffre est inférieur à 5 », C = « on obtient un 5 ». Nous avons $P(A) = \dfrac{3}{6}$ et $P(B) = \dfrac{4}{6}$.
De plus $A \cap B$ est l'événement « on obtient un chiffre pair inférieur à 5 » donc $P(A \cap B) = \dfrac{2}{6}$. L'événement $A \cup B$ est « le chiffre est pair ou inférieur à 5 » donc $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 6\}$ d'où $P(A \cup B) = \dfrac{5}{6}$.

En utilisant le cours, on retrouve le même résultat :
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \dfrac{3}{6} + \dfrac{4}{6} - \dfrac{2}{6} = \dfrac{5}{6}$.
Nous avons $P(C) = \dfrac{1}{6}$ et $A \cap C = \emptyset$. L'événement « le chiffre est pair ou est 5 » est $A \cup C$ et $P(A \cup C) = P(A) + P(C) = \dfrac{3}{6} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.

Exemple 2

on lance deux fois un dé non truqué. Les éventualités sont des couples tels que $(1\,;\,4)$ ou $(5\,;\,5)$, etc. Il y a 36 couples possibles donc 36 éventualités pour cette expérience.
Soit A l'événement « On obtient un double 5 ». Alors A ne contient qu'une éventualité : $A = \{(5\,;\,5)\}$ donc $P(A) = \dfrac{1}{36}$.
Soit B l'événement « On obtient au moins un chiffre supérieur à 2 ».
Alors $\bar{B}$ est l'événement « On n'obtient que des 1 ou des 2 ».
Au lieu de calculer $P(B)$, on calcule $P\left(\bar{B}\right)$ car $\bar{B}$ contient moins d'éventualités que A. On a $\bar{B} = \{(1\,;\,1),(1\,;\,2),(2\,;\,1),(2\,;\,2)\}$ donc $P(\bar{B}) = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$, on en déduit que $P(B) = \dfrac{8}{9}$.

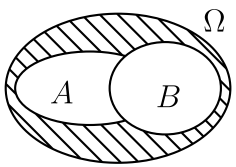
Exemple 4

Nous savons que $P(A) = 0{,}8$, $P(\bar{B}) = 0{,}3$ et que $P(A \cap B) = 0{,}69$.
Quelle est alors la valeur de $P(A \cup B)$?
Réponse :
D'abord, $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 0{,}7$ puis
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}8 + 0{,}7 - 0{,}69 = 0{,}81$.

c) Tableau à double entrée

Exemple 4

Avec les données de l'exemple 4, nous cherchons $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.
1re approche :
$\bar{A} \cap \bar{B}$ est l'ensemble des éventualités qui ne sont ni dans A ni dans B, c'est donc le contraire de $A \cup B$ (voir figure).



Comme $P(A \cup B) = 0{,}81$, il vient $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 0{,}19$.

2e approche :

Le tableau qui suit est un tableau à double entrée (ou tableau de Karnaugh) :

	A	$\bar{A}$	
B	**0,69**	0,01	0,7
$\bar{B}$	0,11	0,19	**0,3**
	0,8	0,2	

dans lequel j'ai indiqué en gras les valeurs données dans l'énoncé de $P(A)$, de $P(\bar{B})$ et de $P(A \cap B)$.

Il ne reste plus qu'à le compléter pour trouver $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}19$.

II. Probabilité conditionnelle

1) Définition

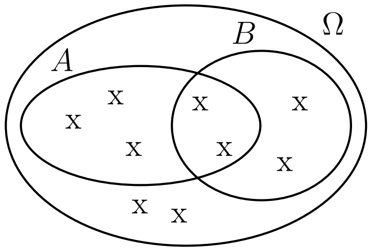
Nous nous intéressons ici aux cas où la réalisation d'un événement B dépend de celle d'un autre événement A.

Nous notons $P_A(B)$ la probabilité que B se réalise **sachant que** A est déjà réalisé.

$P_A(B)$ se lit « probabilité de B sachant A », c'est une probabilité conditionnelle.

Exemple 5

Supposons que nous soyons dans une situation où il n'y a que quelques éventualités, représentées par des croix ci-contre et toutes équiprobables (pour simplifier) :



Alors :

— la probabilité que B se réalise est $P(B) = \dfrac{4}{9}$;

— la probabilité que A et B se réalisent est $P(A \cap B) = \dfrac{2}{9}$;

— si **nous savons** que A est réalisé alors la probabilité que B se réalise est $P_A(B) = \dfrac{2}{5}$ (car parmi les 5 éventualités de A, il y en a 2 qui sont dans B) ;

— si **nous savons** que B est réalisé alors la probabilité que A se réalise est $P_B(A) = \dfrac{2}{4}$ (car parmi les 4 éventualités de B, il y en a 2 qui sont dans A).

Remarque

Vous aurez remarqué sur cet exemple que :

— $P(A \cap B)$, $P(B)$ et $P_A(B)$ sont trois nombres différents ;

— $P_A(B) \neq P_B(A)$ en général.

Exemple 6

Une entreprise reçoit des pièces mécaniques de deux fournisseurs A et B, la première fournissant 70 % des pièces.

Parmi les pièces du fournisseur A, il y en a 40 % de première qualité ; parmi les pièces du fournisseur B, il y en a 20 % de première qualité.

Nous choisissons une pièce au hasard.

Notons A l'événement « La pièce provient du fournisseur A » ($\bar{A}$ est donc l'événement « La pièce provient du fournisseur B ») et Q l'événement « La pièce est de première qualité ».

Donnez les valeurs de $P(A)$, de $P_A(Q)$ et de $P_{\bar{A}}(\bar{Q})$.

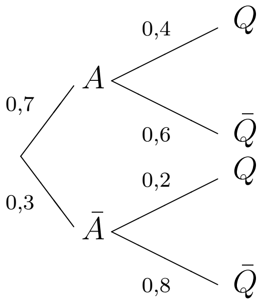
Réponses :

— $P(A)$ est la probabilité que la pièce provienne du fournisseur A donc $P(A) = 0{,}7$;

— $P_A(Q)$ est la probabilité que la pièce soit de première qualité sachant qu'elle vient du fournisseur A donc $P_A(Q) = 0{,}4$;

— $P_{\bar{A}}(\bar{Q})$ est la probabilité que la pièce ne soit pas de première qualité sachant qu'elle ne vient pas du fournisseur A or 80 % des pièces du fournisseur B ne sont pas de première qualité donc $P_{\bar{A}}(\bar{Q}) = 0{,}8$.

L'arbre pondéré ci-contre résume les différents cas (dans un tel arbre, la somme des probabilités des branches partant d'un même nœud est 1).
Un arbre contient des probabilités conditionnelles mais pas de probabilités d'intersection (c'est le contraire pour un tableau à double entrée).



2) Lien entre $P_A(B)$ et $P(A \cap B)$

Propriété 4

La probabilité que B se réalise sachant que A est réalisé est :

$$\boxed{P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

Remarque

Ceci peut en fait être considéré comme une définition de $P_A(B)$.

Exemple 4

Donnez : $P_A(B)$; $P_B(A)$; $P_{\bar{A}}(B)$; $P_{\bar{B}}(A \cap B)$; $P_{\bar{B}}(A \cap \bar{B})$.

<u>Réponses :</u>

— $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0{,}69}{0{,}8} = \dfrac{69}{80}$;

— $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}69}{0{,}7} = \dfrac{69}{70}$;

— $P_{\bar{A}}(B) = \dfrac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})} = \dfrac{0{,}01}{0{,}2} = 0{,}05$;

— $P_{\bar{B}}(A \cap B) = \dfrac{P(A \cap B \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \dfrac{0}{0{,}3} = 0$;

— $P_{\bar{B}}(A \cap \bar{B}) = \dfrac{P(A \cap \bar{B} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \dfrac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \dfrac{0{,}11}{0{,}3} = \dfrac{11}{30}$.

3) Conséquence : calcul de $P(A \cap B)$

Propriété 5

$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)}$.

Exemple 6

$P(A \cap Q) = P(A) \times P_A(Q) = 0{,}7 \times 0{,}4 = 0{,}28$ et
$P(B \cap \bar{Q}) = P(B) \times P_B(\bar{Q}) = 0{,}3 \times 0{,}8 = 0{,}24$.

Remarque

Ne confondez pas $P(A \cap B)$ et $P_A(B)$! Dans l'exemple 6, comparez les deux questions suivantes :

— « Déterminer la probabilité qu'une pièce provienne du fournisseur A et soit de première qualité » : on demande alors le calcul de $P(A \cap Q)$; l'univers est l'ensemble des pièces.
La réponse est donc 0,28.

— « On choisit une pièce du fournisseur A. Déterminer alors la probabilité qu'elle soit de première qualité » : on demande ici le calcul de $P_A(Q)$; l'univers est l'ensemble des pièces du fournisseur A.
La réponse est donc 0,4.

Remarque

La propriété 5 est parfois appelée « règle du produit » : pour trouver la probabilité d'une intersection, vous pouvez multiplier les probabilités apparaissant dans l'arbre, pour le chemin considéré.

4) Formule des probabilités totales

Définition

Des événements A_1, A_2, ... A_n forment une partition de l'univers Ω si :

- ils sont incompatibles deux à deux : $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tous $i \neq j$;
- leur réunion est l'univers : $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$.

Remarque

Une partition A_1, A_2, ... A_n de l'univers découpe un événement B en plusieurs parties : $B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \cdots \cup (B \cap A_n)$.

Propriété 6

Si A_1, A_2, ... A_n forment une partition de l'univers alors

$$\boxed{\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B) \\ &= P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) \\ &\quad + \cdots + P(A_n) \times P_{A_n}(B). \end{aligned}}$$

Remarque

Interprétation de cette formule : pour calculer $P(B)$, il suffit de suivre chaque branche d'un arbre pondéré qui mène à B en multipliant les probabilités le long de cette branche (propriété 5) puis d'ajouter tous les résultats obtenus (propriété 6).

Exemple 5

dans l'exemple précédent :
$P(Q) = P(A) \times P_A(Q) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(Q) = 0{,}7 \times 0{,}4 + 0{,}3 \times 0{,}2 = 0{,}34$.
Nous pouvons de plus calculer maintenant $P_Q(A)$:
$P_Q(A) = \dfrac{P(A \cap Q)}{P(Q)} = \dfrac{0{,}7 \times 0{,}4}{0{,}34} = \dfrac{14}{17}$.

III. Indépendance

Définition

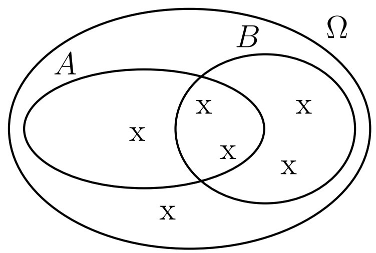
Deux événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Remarque

Le fait que A soit réalisé ou non n'influe alors pas sur la probabilité que B se réalise. En effet, si A et B sont indépendants alors $P_A(B) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(B) \times P(A)}{P(A)} = P(B)$.

Exemple 7

Prenons l'univers ci-contre, dans une situation d'équiprobabilité.
Nous avons alors :
$P(A) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$; $P(B) = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$;
$P(A \cap B) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$



donc $P(A) \times P(B) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3} = P(A \cap B)$ donc A et B sont indépendants.

Remarquez également que $P_A(B) = \dfrac{2}{3} = P(B)$, ce qui prouve également l'indépendance.

Exemple 8

On tire une carte d'un jeu de 32 cartes. Soit A l'événement « on tire un valet ». Soit B l'événement « on tire un carreau ». Les évenements A et B sont indépendants. En effet, le fait de savoir que la carte est un carreau n'augmente pas la probabilité d'avoir un valet.

Vérifions le : $P(A) = \dfrac{1}{8}$, $P(B) = \dfrac{1}{4}$ et $P(A \cap B) = \dfrac{1}{32}$ et on a bien $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Remarque

Les tirages avec remises donnent lieu à des résultats indépendants.

Exemple 9

Dans une boîte contenant 20 boules dont 13 rouges et 7 noires, je prélève successivement deux boules et je cherche la probabilité d'obtenir deux boules rouges. Notons R_1 et R_2 les événements :

R_1 : "la première boule est rouge" ; R_2 : "la seconde boule est rouge".

Nous cherchons donc $P(R_1 \cap R_2)$.

— 1^{er} cas : avec remise. Je prends une première boule que je remets dans la boîte puis j'en tire une seconde (qui peut être éventuellement la même que la première).
Le résultat du premier tirage n'influe pas sur celui du second : les événements R_1 et R_2 sont indépendants donc :
$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P(R_2) = \left(\frac{13}{20}\right)^2.$$

— 2^{e} cas : sans remise. Je prends une première boule puis une seconde sans remettre la première dans l'urne.
Si R_1 est réalisé alors il reste 12 boules rouges sur 19 restantes pour le second tirage et donc $P_{R_1}(R_2) = \dfrac{12}{19}$ donc
$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) = \frac{13}{20} \times \frac{12}{19} = \frac{156}{380}.$$