Fonctions du second degré

I. Fonction carré et fonctions associées

1) Définition de la fonction carré

Définition

La **fonction carré** associe à tout réel son carré.
Autrement dit, la fonction carré est définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{f(x) = x^2}$.

Exemple 1

L'image de 4 est 16 ; l'image de -2 est 4 ; l'image de $4\sqrt{3}$ est $16 \times 3 = 48$; l'image de $2+\sqrt{5}$ est $(2+\sqrt{5})^2 = 4 + 4\sqrt{5} + 5 = 9 + 4\sqrt{5}$.

Remarque

Pensez aux parenthèses ! L'image de -2 est $(-2)^2$ et pas -2^2 !

2) Variations de la fonction carré

Exemple 2

Que devient l'ordre quand on met deux nombres au carré ?
$2 < 5$ et $2^2 < 5^2$; $-5 < -2$ et $(-5)^2 > (-2)^2$.

Propriété 1

Les carrés de deux nombres positifs (resp. négatifs) sont rangés dans le même ordre (resp. dans l'ordre contraire) que ces nombres.

Exemple 3

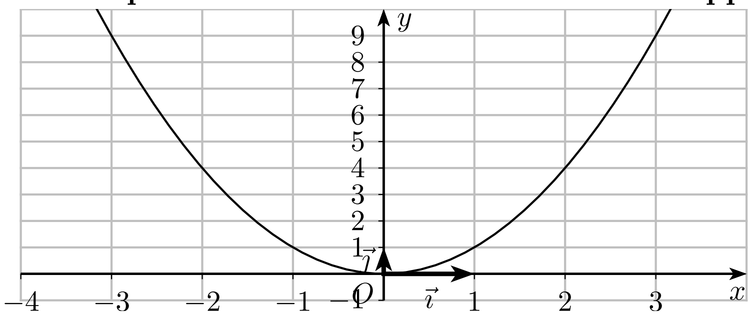
Qui est le plus grand : $3\sqrt{2}$ ou $2\sqrt{3}$?
$(3\sqrt{2})^2 = 9 \times 2 = 18 > (2\sqrt{3})^2 = 4 \times 3 = 12$ et $3\sqrt{2}$, $2\sqrt{3}$ sont positifs donc $3\sqrt{2} > 2\sqrt{3}$.
Qui est le plus grand : $-2\sqrt{7}$ ou $-3\sqrt{5}$?
$(-2\sqrt{7})^2 = 4 \times 7 = 28 < (-3\sqrt{5})^2 = 9 \times 5 = 45$ mais $-2\sqrt{7}$, $-3\sqrt{5}$ sont négatifs donc $-2\sqrt{7} > -3\sqrt{5}$.

Propriété 2

La fonction carrée est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$. Son tableau de variations est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
variation de f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) Courbe représentative de la fonction carré et applications



La courbe représentative de la fonction carrée est une **parabole**.
Elle est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées car <u>deux nombres opposés ont la même image</u>.

Exemples 4

En utilisant la courbe ou le tableau de variations, nous trouvons que :
$x^2 = 4 \iff x = 2$ ou $x = -2$
$3x^2 = 4 \iff x^2 = 4/3 \iff x = \sqrt{4/3}$ ou $x = -\sqrt{4/3}$
$x^2 + 1 = 0 \iff x^2 = -1$ ce qui est impossible car $x^2 \geqslant 0$.
$x^2 < 4 \iff -2 < x < 2$
$-3x^2 + 6 \leqslant 0 \iff x^2 \geqslant 2 \iff x > \sqrt{2}$ ou $x < -\sqrt{2}$
$x^2 < -2$: impossible car $x^2 \geqslant 0$
$x^2 > -3$: toujours vrai car $x^2 \geqslant 0$.

Remarque

Attention : $x^2 < 4$ <u>n'est pas</u> équivalent à $x < 2$!

4) Fonctions associées à la fonction carré

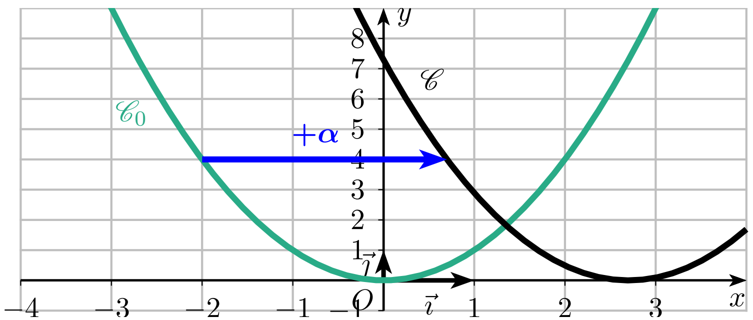
a) Fonctions de la forme $(x-\alpha)^2$

Propriété 3

La courbe $\mathscr{C}$ de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x-\alpha)^2$ est l'image de la courbe $\mathscr{C}_0$ de la fonction carré par la translation de vecteur $\alpha\,\vec{\imath}$.

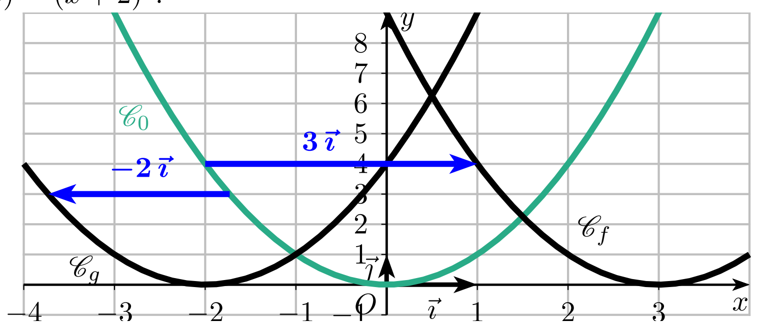
Remarque

Attention : la translation est bien de vecteur $\alpha\,\vec{\imath}$, pas $-\alpha\,\vec{\imath}$!



Exemple 5

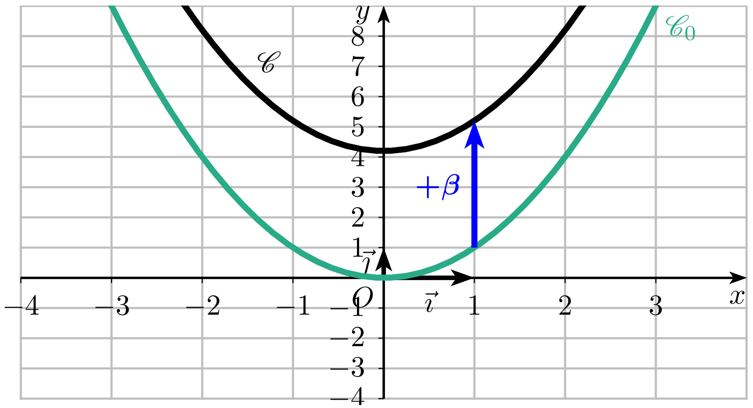
Voici les courbes des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x-3)^2$ et $g(x)=(x+2)^2$.



b) Fonctions de la forme $x^2+\beta$

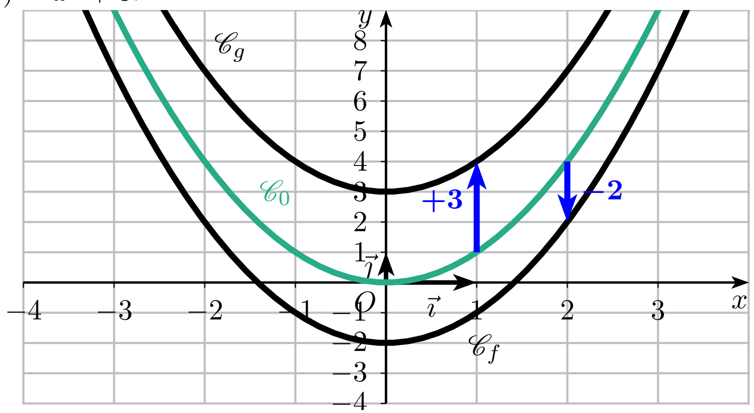
Propriété 4

La courbe $\mathscr{C}$ de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+\beta$ est l'image de la courbe $\mathscr{C}_0$ de la fonction carré par la translation de vecteur $\beta\,\vec{\jmath}$.



Exemple 6

Voici les courbes des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-2$ et $g(x)=x^2+3$.



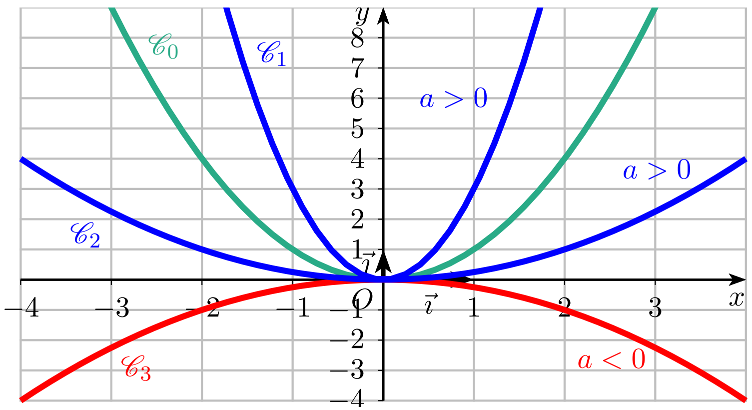
c) Fonctions de la forme ax^2

Propriété 5

Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2$, avec $a \neq 0$.
Deux cas se présentent :

— si $a > 0$ alors f a les mêmes variations que la fonction carré et sa courbe est « tournée vers le haut » ;

— si $a < 0$ alors f a les variations contraires de celles de la fonction carré et sa courbe est « tournée vers le bas ».



Exemple 7

Les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ ci-dessus sont respectivement celles des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\,x^2$, $g(x) = 0,25\,x^2$ (en bleu) et $h(x) = -0,25\,x^2$ (en rouge).

Remarque

Observez que la fonction f a une croissance plus rapide que la fonction carré car $3 > 1$ et que la fonction g a une croissance plus lente que la fonction carré car $0.25 < 1$.

d) Combinaison des opérations précédentes (exemple)

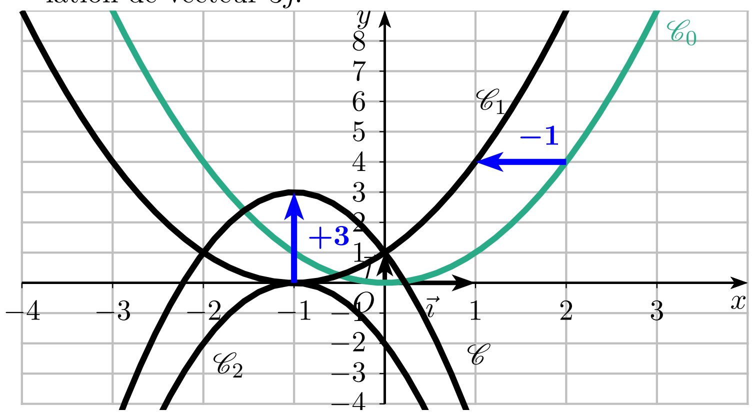
Exemple 8

Soit f la fonction définie par $f(x) = -2(x+1)^2 + 3$.
La courbe de f se déduit de la courbe de la fonction carré ainsi :

— la courbe $\mathscr{C}_1$ de $f_1(x) = (x+1)^2$ se déduit de la courbe $\mathscr{C}_0$ de la fonction carré par translation de vecteur $-\vec{\imath}$;

— la courbe $\mathscr{C}_2$ de $f_2(x) = -2(x+1)^2$ se déduit de $\mathscr{C}_1$ en la retournant et en « l'accélérant » ;

— la courbe $\mathscr{C}$ de $f(x) = -2(x+1)^2 + 3$ se déduit de $\mathscr{C}_2$ par translation de vecteur $3\vec{\jmath}$.



II. Fonctions du second degré

Définition

Une fonction du second degré est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$$

où a, b, c sont des réels fixés, avec a non nul.

Remarques :

— Une telle fonction est aussi appelée fonction polynôme de degré 2 ou trinôme du second degré.

— Si a était nul, on aurait affaire à une fonction affine.

Exemple 9

Dîtes si les expressions suivantes sont celles de fonctions du second degré et, si oui, indiquez qui sont a, b, c :

Expression	Fonction du second degré ?	a	b	c
$3x-7$	non			
$-3x^2+2x-1$	oui	-3	2	-1
$2x^2-4x$	oui	2	-4	0
$2x^3-7x+1$	non			
$1+2x^2$	oui	2	0	1

III. Forme canonique d'une fonction du second degré

1) Définition et obtention

Propriété 6

Toute fonction du second degré peut s'écrire sous la forme :

$$f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta.$$

Définition

La forme $\boxed{a(x-\alpha)^2+\beta}$ est la forme canonique de ax^2+bx+c.

Exemple 10

L'expression $-2(x+3)^2+2$ est la forme canonique de $-2x^2-12x-16$.
En effet :
$-2(x+3)^2+2=-2(x^2+6x+9)+2=-2x^2-12x-18+2=-2x^2-12x-16$.

Comment trouver la forme canonique d'une fonction du second degré

Il faut utiliser la formule $\boxed{x^2+2ax=(x+a)^2-a^2}$.

Exemple 11

Retrouver la forme canonique de $-2x^2-12x-16$.
D'abord, je factorise les termes en x par $a=-2$:
$-2x^2-12x-16=-2\left(x^2+6x\right)-16$.
Ensuite, j'utilise la formule $x^2+2ax=(x+a)^2-a^2$:

$$\begin{aligned}-2\left(x^2+6x\right)-16 &= -2\left((x+3)^2-3^2\right)-16\\ &= -2\left((x+3)^2-9\right)-16\\ &= -2(x+3)^2+18-16\\ &= -2(x+3)^2+2.\end{aligned}$$

2) Applications de la forme canonique

a) Variations d'une fonction du second degré

Propriété 7

Soit f une fonction du second degré écrite sous sa forme canonique $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$. Les variations de f dépendent du signe de a :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	β	$\nearrow$	$+\infty$

Cas où $a>0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	β	$\searrow$	$-\infty$

Cas où $a<0$

Exemple 12

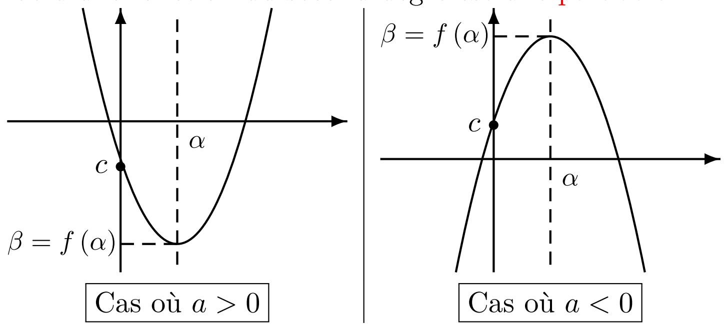
Écrire le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-2x^2-12x-16$.
Réponse :
Nous avons vu que $-2(x+3)^2+2$ est la forme canonique de $-2x^2-12x-16$ donc, ici, $a=-2$, $\alpha=-3$ et $\beta=2$, d'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

b) Courbe d'une fonction du second degré

Propriétés 8

La courbe d'une fonction du second degré est une parabole.



La courbe de la fonction f est symétrique par rapport à la droite d'équation $\boxed{x = \alpha}$. Le sommet a pour coordonnées $\boxed{(\alpha\,;\,\beta)}$.

Exemple 13

Donner l'axe de symétrie et le sommet de la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 - 12x - 16$.
Réponse : comme $-2x^2 - 12x - 16 = -2(x+3)^2 + 2$, l'axe de symétrie a pour équation $x = -3$ et le sommet a pour coordonnées $(-3\,;\,2)$.

3) Passage de la forme canonique à une forme factorisée

Passage de la forme canonique à une forme factorisée.

Quand c'est possible, on utilise $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

Exemple 14

$$\begin{aligned} -2(x+3)^2 + 2 &= -2\left[(x+3)^2 - 1\right] = -2\left[(x+3)^2 - 1^2\right] \\ &= -2\left[(x+3) - 1\right]\left[(x+3) + 1\right] \\ &= -2\,(x+2)\,(x+4)\,. \end{aligned}$$

Exemple 15

$-4(x+1)^2 - 8 = -4[(x+1)^2 + 2]$.
L'expression entre crochets n'est pas de la forme $a^2 - b^2$ et en fait il est impossible de factoriser dans $\mathbb{R}$ cette expression.

IV. Forme factorisée et applications

1) Définition

Propriété 9

Certaines fonctions du second degré peuvent s'écrire sous la forme :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Définition

La forme $\boxed{a(x - x_1)(x - x_2)}$ est la forme factorisée de $ax^2 + bx + c$.

Exemple 16

$-2\,(x+2)\,(x+4)$ est la forme factorisée de $-2x^2 - 12x - 16$.

2) Applications de la forme factorisée

a) Résolution de $ax^2 + bx + c = 0$, racines de $ax^2 + bx + c$

Résolution de $ax^2 + bx + c = 0$

Quand une fonction du second degré a une forme factorisée, nous pouvons savoir quand elle s'annule.

Exemple 17

$-2(x+2)(x+4) = 0 \iff x+2 = 0$ ou $x+4 = 0 \iff x = -2$ ou $x = -4$.
Comme $-2x^2 - 12x - 16 = -2(x+3)^2 + 2 = -2(x+2)(x+4)$, nous pouvons conclure que les solutions de $-2x^2 - 12x - 16 = 0$ sont -2 et -4.

Exemple 18

Pour $-4(x+1)^2 - 8 = 0$, nous pouvons remarquer directement que $-4(x+1)^2 - 8$ est toujours strictement négatif donc ne s'annule jamais.

Remarque

Quand elles existent, les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont appelées racines de la fonction f.

Propriété 10

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \Longleftrightarrow x_1$ et x_2 sont les racines de f.

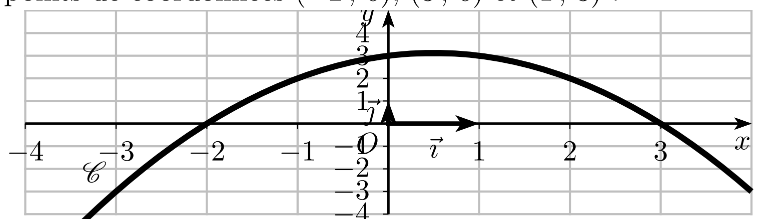
Exemple 19

Les racines de $-2(x+2)(x+4)$ sont -2 et -4.

b) Détermination d'une fonction s'annulant en deux valeurs

Exemple 20

Donner l'expression de la fonction f dont la courbe ci-dessous passe par les points de coordonnées $(-2\,;\,0)$, $(3\,;\,0)$ et $(1\,;\,3)$:



Réponses :
Les racines étant $x_1 = -2$ et $x_2 = 3$, nous pouvons écrire :
$f(x) = a(x - (-2))(x - 3) = a(x+2)(x-3)$.
De plus, il faut que $f(1) = 3$ or $f(x) = a(x+2)(x-3)$ donc
$a(1+2)(1-3) = 3$ ce qui donne : $-6a = 3$ d'où $a = -\dfrac{1}{2}$.
Conclusion : $f(x) = -\dfrac{1}{2}(x+2)(x-3) = -\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x + 3$.

c) Application aux tableaux de signes

Exemple 21

Faisons le tableau de signes de $-2x^2 - 12x - 16$ à l'aide de sa forme factorisée $-2(x+2)(x+4)$:

x	$-\infty$		-4		-2		$+\infty$
-2		$-$		$-$		$-$	
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2x^2 - 12x - 16$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Pour les fonctions affines $x+2$ et $x-4$, j'ai utilisé la règle du « signe de a après le 0 » (ici $a = 1 > 0$ car $x + 2 = 1x + 2$ et $x - 4 = 1x - 4$).

3) Recherche de la forme factorisée

a) Dans des cas particuliers

Il est possible de factoriser simplement quand $b = 0$ ou $c = 0$.

Exemple 22

Donner la forme factorisée de $-3x^2 + 4x$.
Réponse : $-3x^2 + 4x = x(-3x + 4) = -3x\left(x - \dfrac{4}{3}\right)$.

Exemple 23

Donner la forme factorisée de $-3x^2 + 12$.
Réponse : $-3x^2 + 12 = -3(x^2 - 4) = -3(x^2 - 2^2) = -3(x-2)(x+2)$.

b) Avec la forme canonique

Ceci a été vu au III. 3).

c) Avec une racine évidente

Exemple 24

Donner la forme factorisée de $f(x) = -3x^2 + 4x - 1$.
Réponse : $f(1) = -3 \times 1^2 + 4 \times 1 - 1 = -3 + 4 - 1 = 0$ donc 1 est une racine *évidente* de f.
Si je note donc $x_1 = 1$, il vient :

$$\begin{aligned} -3x^2 + 4x - 1 &= -3(x-1)(x-x_2) = -3(x^2 - x_2x - x + x_2) \ . \\ &= -3x^2 + 3x_2x + 3x - 3x_2 \end{aligned}$$

Par identification du terme constant (celui sans x), je trouve :
$-1 = -3\,x_2$ donc $x_2 = \dfrac{1}{3}$.
Conclusion : $-3x^2 + 4x - 1 = -3\,(x-1)\left(x - \dfrac{1}{3}\right)$.

d) Avec la somme et le produit des racines

Propriété 11

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ a une forme factorisée $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ alors $\boxed{x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}}$ et $\boxed{x_1x_2 = \dfrac{c}{a}}$.

Exemple 25

Donner la forme factorisée de $f(x) = -2x^2 + 10x - 12$.
Réponse :
Les formules ci-dessus donnent $x_1 + x_2 = -\dfrac{10}{-2} = 5$ et $x_1x_2 = \dfrac{-12}{-2} = 6$.
Il suffit donc de trouver deux nombres dont la somme est 5 et le produit est 6, ces deux nombres sont 2 et 3 donc :
$-2x^2 + 10x - 12 = -2(x - x_1)(x - x_2) = -2(x-2)(x-3)$.