Fonction exponentielle

I. Définitions

Remarque

Nous avons vu dans le chapitre sur la dérivation que la dérivée d'une fonction est une autre fonction.
Par exemple, la dérivée de la fonction carrée ($f(x) = x^2$) est la fonction double ($f'(x) = 2\,x$).
Existe-t-il une fonction qui « ne change pas » quand on la dérive ?

Propriété 1

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Démonstration

Nous admettons ici que cette fonction existe (ce qui est plus difficile à prouver).
• Prouvons d'abord qu'une telle fonction ne peut pas s'annuler.
Soit donc f une fonction vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$ et posons $h(x) = f(x)f(-x)$ pour tout x.
Alors h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} h'(x) &= (f(x))'f(-x) + f(x)(f(-x))' && \text{(dérivée d'un produit)} \\ &= f'(x)f(-x) + f(x)(-f'(-x)) && \text{(dérivée de } x \mapsto g(ax+b) \text{ avec } a=-1 \text{ et } b=0) \\ &= f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x) \\ &= f(x)f(-x) - f(x)f(-x) && \text{(car } f' = f) \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc la fonction h est constante : $h(x) = c$ pour tout réel x.
De plus, comme $h(0) = f(0)f(-0) = 1 \times 1 = 1$, il vient $c = 1$ donc $h(x) = 1$ pour tout réel x.
La fonction f ne peut donc pas s'annuler, sinon on aurait $h(x) = 0 \times f(-x) = 0$ pour un certain x.
• Démontrons l'unicité de cette fonction : supposons au contraire qu'il existe deux telles fonctions f et g. Comme g ne peut pas s'annuler, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2} = \dfrac{fg - fg}{g^2} = 0$ car $f' = f$ et $g' = g$.
Donc la fonction $\dfrac{f}{g}$ est une fonction constante : pour tout x, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = k$.
Or $\left(\dfrac{f}{g}\right)(0) = \dfrac{f(0)}{g(0)} = \dfrac{1}{1} = 1$ donc $k = 1$ d'où, pour tout x, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = 1$ donc $f(x) = g(x)$: les fonctions f et g sont une seule et même fonction.

Définition

Cette fonction est appelée fonction exponentielle et notée exp.

Remarques

➩ Nous avons donc : $\boxed{(\exp(x))' = \exp(x)}$ et $\boxed{\exp(0) = 1}$
➩ La fonction exponentielle intervient dans de nombreux domaines, que ce soit en sciences, en économie, etc.

II. Propriétés algébriques. Nombre e

Propriété 2

Pour tous réels x et y, $\boxed{\exp(x+y)=\exp(x)\exp(y)}$.

Démonstration

L'astuce de la démonstration est de « fixer » y (nous écrirons $y=c$ comme constante) et de considérer que x est une variable, en posant : $f(x)=\dfrac{\exp(x+c)}{\exp(x)\exp(c)}$ et en prouvant que $f(x)=1$.
Pour cela, commençons par prouver que $f'(x)=0$ pour tout x.
• f est de la forme $\dfrac{u}{v}$;
• $u=\exp(x+c)$ est de la forme $g(ax+b)$ ($g=\exp$; $a=1$; $b=c$)
donc $u'=ag'(ax+b)=1(\exp)'(1x+c)=\exp(x+c)$;
• pour dériver $v=\exp(x)\exp(c)$, remarquons que $\exp(c)$ est une constante
donc $v'=(\exp(x))'\exp(c)=\exp(x)\exp(c)$.
• D'où $f(x)=\dfrac{\exp(x+c)\times\exp(x)\exp(c)-\exp(x+c)\times\exp(x)\exp(c)}{(\exp(x)\exp(c))^2}=0$.
Donc la fonction f est une fonction constante : pour tout x, $f(x)=k$.
Or $f(0)=\dfrac{\exp(0+c)}{\exp(0)\exp(c)}=\dfrac{\exp(c)}{1\times\exp(c)}=1$ donc $k=1$ d'où, pour tout x, $f(x)=1$
donc $\exp(x+c)=\exp(x)\exp(c)$ et, comme c était quelconque, $\exp(x+y)=\exp(x)\exp(y)$.

Propriété 3

Pour tout réel x, $\boxed{\exp(-x)=\dfrac{1}{\exp(x)}}$.

Démonstration

D'après la propriété 2, nous avons
$\exp(x)\exp(-x)=\exp(x+(-x))=\exp(0)=1$ donc $\exp(-x)=\dfrac{1}{\exp(x)}$.
(ceci a aussi été prouvé lors de la démonstration de la propriété 1 car $h(x)=\exp(x)\exp(-x)=1$).

Propriété 4

Pour tout réel x et tout entier n, $\boxed{(\exp(x))^n=\exp(nx)}$.

Démonstration

• Nous avons, pour les entiers strictement positifs :
pour $n=1$, $(\exp(x))^1=\exp(x)=\exp(1x)$;
pour $n=2$, d'après la propriété 2, $(\exp(x))^2=\exp(x)\exp(x)=\exp(x+x)=\exp(2x)$;
pour $n=3$, $(\exp(x))^3=\exp(x)(\exp(x))^2=\exp(x)\exp(2x)=\exp(x+2x)=\exp(3x)$
etc. (il faut une *démonstration par récurrence* pour continuer ici...)
• Pour $n=0$:
$(\exp(x))^n=(\exp(x))^0=1$ car $a^0=1$ pour tout $a\neq 0$ (et $\exp(x)\neq 0$)
$\exp(nx)=\exp(0\times x)=\exp(0)=1$
donc $(\exp(x))^0=\exp(0x)$;

• Pour un entier n strictement négatif :

$$\begin{aligned}(\exp(x))^n &= \frac{1}{(\exp(x))^{-n}} \qquad \text{(propriété sur les puissances)}\\ &= \frac{1}{\exp(-nx)} \qquad \text{(car } -n \text{ est un entier positif)}\\ &= \exp(nx) \qquad \text{(d'après la propriété 3)}\end{aligned}$$

Propriété 5

Pour tout réel x, $\boxed{\dfrac{\exp(x)}{\exp(y)} = \exp(x-y)}$.

Démonstration

D'après la propriété 2, nous avons

$\exp(x-y)\exp(y) = \exp(x-y+y) = \exp(x)$ donc $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$.

Remarque

Les plus affutés auront remarqué que ces propriétés évoquent celles des puissances, par exemple, $10^{2+3} = 10^2 \times 10^3$; $10^{-2} = \dfrac{1}{10^2}$ et $\dfrac{10^5}{10^2} = 10^{5-2} = 10^3$.

Définition

Le nombre e est l'image de 1 par la fonction exponentielle : $\boxed{\exp(1) = \mathrm{e}}$.

Remarques

➫ e est une constante que l'on retrouve partout en mathématiques et en sciences, au même titre que π. Elle est à peu près égale à 2,718.

➫ En appliquant la propriété 4 : pour tout entier n, $\exp(n) = \exp(n\times 1) = (\exp(1))^n = \mathrm{e}^n$.

➫ Nous noterons par extension dans la suite : $\boxed{\exp(x) = \mathrm{e}^x}$ pour tout x réel.

➫ Ceci permet surtout de retenir simplement les propriétés précédentes :

$$\boxed{\mathrm{e}^0 = 1} \qquad \boxed{\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}}$$

$$\boxed{\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^y} \qquad \boxed{\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}^x}} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y} = \mathrm{e}^{x-y}} \qquad \boxed{(\mathrm{e}^x)^n = \mathrm{e}^{nx}}$$

➫ Ceci permet également de parler d'un exposant réel et pas seulement entier ! Ainsi $\mathrm{e}^{1,5}$ veut dire $\exp(1{,}5)$. Nous pourrons plus tard grâce à la fonction exponentielle définir également, par exemple, 5^π, écriture qui n'avait pas de sens jusqu'à maintenant…

Exemples 1

Voici quelques exemples de calculs :

➫ $\dfrac{\mathrm{e}^4\times\mathrm{e}}{\mathrm{e}^8} = \dfrac{\mathrm{e}^4\times\mathrm{e}^1}{\mathrm{e}^8} = \dfrac{\mathrm{e}^{4+1}}{\mathrm{e}^8} = \dfrac{\mathrm{e}^5}{\mathrm{e}^8} = \mathrm{e}^{5-8} = \mathrm{e}^{-3}$

➫ $\mathrm{e}^{-x}\times\dfrac{\mathrm{e}^{x-2}}{\mathrm{e}^{3-5\,x}} = \mathrm{e}^{-x}\times\mathrm{e}^{x-2-(3-5\,x)} = \mathrm{e}^{-x+x-2-3+5\,x} = \mathrm{e}^{5\,x-5}$

➫ $(3-\mathrm{e}^{-x})^2 = 3^2 - 2\times 3\times\mathrm{e}^{-x} + (\mathrm{e}^{-x})^2 = 9 - 6\,\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x}$

Propriété 6

Pour tout réel a, la suite (e^{na}) est une suite géométrique.

Démonstration

En effet $\dfrac{\mathrm{e}^{(n+1)a}}{\mathrm{e}^{na}} = \mathrm{e}^{(n+1)a-na} = \mathrm{e}^{a}$ qui est une constante (donc la raison de cette suite géométrique).

III. Études de fonctions

1) Signe de la fonction exponentielle

Propriété 7

Pour tout réel x, $\boxed{\mathrm{e}^{x} > 0}$.

Démonstration

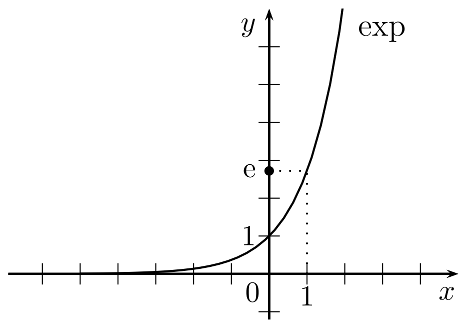
En effet, $\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{2\times(x/2)} = \left(\mathrm{e}^{x/2}\right)^2 \geqslant 0$.
Comme la fonction exponentielle ne s'annule pas, nous trouvons que $\mathrm{e}^{x} > 0$ pour tout réel x.

2) Variation et courbe de la fonction exponentielle

Propriété 8

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$(\exp)'$	$+$	
$\exp$	0 $\nearrow$	$+\infty$



Démonstration

Pour tout x réel, $(e^{x})' = \mathrm{e}^{x} > 0$ d'après la propriété 7.

Remarques

➯ Les deux « valeurs » aux extrémités de la flèche ne sont pas à connaître, néanmoins, pour les plus curieux, voilà quelques explications intuitives ; considérons un entier n :
• comme $\mathrm{e} \simeq 2{,}718 > 1$, le nombre e^{n} deviendra de plus en plus grand quand n tend vers $+\infty$ et puisque la fonction est croissante, e^{x} deviendra de plus en plus grand quand x tendra vers $+\infty$;
• quand n tend vers $-\infty$, remarquons que $\mathrm{e}^{n} = \frac{1}{\mathrm{e}^{-n}}$, avec $-n$ qui tend vers $+\infty$ donc e^{-n} tend vers $+\infty$ et e^{n} tend vers 0.
• Ces valeurs se retrouvent aussi par analogie avec les puissances de 10, par exemple 10^{40} est un nombre très grand tandis que 10^{-40} est un nombre très proche de 0.
➯ La connaissance de cette courbe permet de retrouver les variations et le signe de la fonction exponentielle (ainsi que les « limites »).

Propriété 9

Pour tous les réels a et b :

$\boxed{e^a = e^b \iff a = b}$ $\boxed{e^a > e^b \iff a > b}$.

Démonstration

Ce sont des conséquences de la croissance stricte de la fonction exponentielle.

Exemples 2

- Résolution de $e^{3x-1} = e^{x+2}$:
$e^{3x-1} = e^{x+2} \iff 3x - 1 = x + 2 \iff 3x - x = 2 + 1 \iff 2x = 3 \iff x = \dfrac{3}{2}$ donc $S = \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.
- Résolution de $e^{3x-1} = 1$:
$e^{3x-1} = 1 \iff e^{3x-1} = e^0 \iff 3x - 1 = 0 \iff 3x = 1 \iff x = \dfrac{1}{3}$ donc $S = \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$.
- Résolution de $e^{2-3x} < e$:
$e^{2-3x} < e \iff e^{2-3x} < e^1 \iff 2 - 3x < 1 \iff -3x < -1 \iff x > \dfrac{1}{3}$ donc $S = \left]\dfrac{1}{3}\,;\,+\infty\right[$.
- Résolution de $e^{2x^2-x} \geqslant e$:
$e^{2x^2-x} \geqslant e \iff e^{2x^2-x} \geqslant e^1 \iff 2x^2 - x \geqslant 1 \iff 2x^2 - x - 1 \geqslant 0$
Les racines de $2x^2 - x - 1$ sont (calculer Δ, etc. ou racine évidente : 1 puis utilisation de $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$) :
$x_1 = -\dfrac{1}{2}$ et $x_2 = 1$.
Le signe de $2x^2 - x - 1$ est celui de $a = 2 > 0$ sauf entre les racines donc $2x^2 - x - 1 \geqslant 0$ si $x \leqslant -\dfrac{1}{2}$ ou si $x \geqslant 1$ donc $S = \left]-\infty\,;\,-\dfrac{1}{2}\right] \cup [\,1\,;\,+\infty\,[$.

3) Calculs de dérivées de fonctions comportant des exponentielles

Remarque

Les propriétés vues dans les chapitres sur la dérivation s'applique encore évidemment ici.

Exemples 3

Les fonctions suivantes sont toutes définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

- Si $f(x) = -5\,e^x$ alors $f'(x) = -5\,e^x$ (dérivée de ku).
- Si $f(x) = x^2 + 3 + e^x$ alors $f'(x) = 2x + e^x$ (dérivée de $u + v$).
- Si $f(x) = x^2\,e^x$ alors $f'(x) = 2x\,e^x + x^2\,e^x = e^x(x^2 + 2x)$ (dérivée de uv).
- Si $f(x) = \dfrac{2x-1}{e^x}$ alors $f'(x) = \dfrac{2\,e^x - (2x-1)\,e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{e^x(2 - 2x + 1)}{e^{2x}} = e^{-x}(1 - 2x)$ (dérivée de $\dfrac{u}{v}$).
- Si $f(x) = e^{4-3x}$ alors $f'(x) = -3\,e^{4-3x}$ (dérivée de $g(ax+b)$).

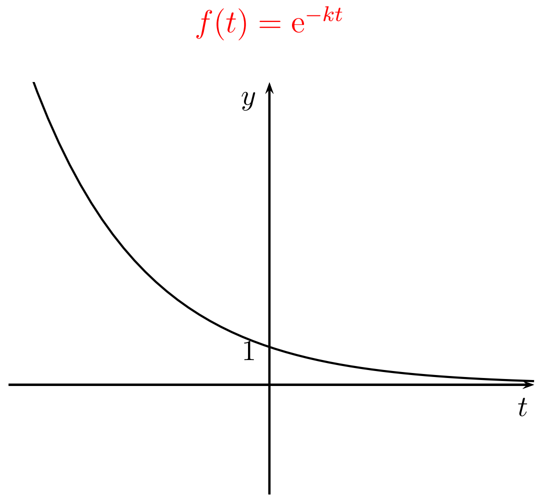
Remarque

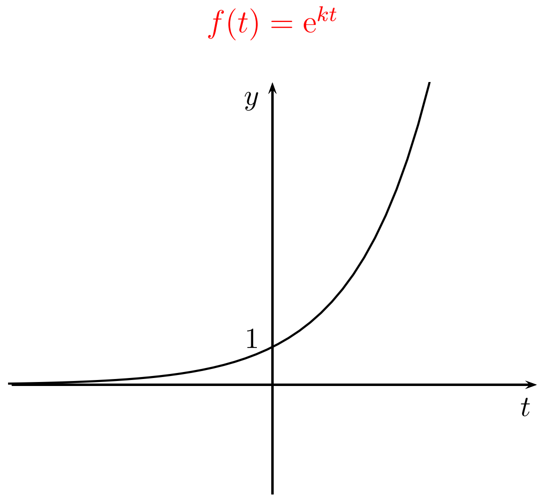
Retenez que : $\left(e^{ax+b}\right)' = a\,e^{ax+b}$

4) Représentation graphique des fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^{-kt}$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{kt}$

Propriété 10

Soit k un réel strictement positif. Voici les courbes des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par :





Démonstration

Si $f(t) = \mathrm{e}^{-kt}$ alors $f'(t) = -k\,\mathrm{e}^{-kt} < 0$ car $k > 0$ et $\mathrm{e}^{x} > 0$ pour tout réel x.
Si $f(t) = \mathrm{e}^{kt}$ alors $f'(t) = k\,\mathrm{e}^{kt} > 0$ car $k > 0$ et $\mathrm{e}^{x} > 0$ pour tout réel x.

Exemples 4

- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-3\,x}$ est strictement décroissante car $-3 < 0$.
- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{4\,x}$ est strictement croissante car $4 > 0$.
- Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-1-2\,x}$.

Alors $f(x) = \mathrm{e}^{-1} \times \mathrm{e}^{-2\,x}$ donc, comme $\mathrm{e}^{-1} > 0$, f a les mêmes variations que la la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^{-2\,x}$. Or cette fonction g est strictement décroissante car $-2 < 0$ donc f l'est également.