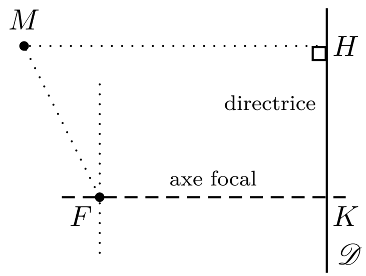
Ellipses

I. Définitions

Soit $\mathscr{D}$ une droite du plan, F un point du plan et e un réel strictement inférieur à 1. L'ensemble des points M du plan tels que $\dfrac{MF}{MH} = e$, où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}$, est appelé ellipse de foyer F, de directrice $\mathscr{D}$ et d'excentricité e.

Axe focal : droite perpendiculaire à la directrice et passant par le foyer.



Remarque : en BTS MGTMN, l'axe focal est parallèle à un des axes de coordonnées.

II. Propriétés géométriques

Propriété 1

L'axe focal coupe l'ellipse en deux points S et S' appelés sommets de l'ellipse.

Propriété 2

Le milieu Ω de $[SS']$ est un centre de symétrie, appelé centre de l'ellipse.

Remarques :

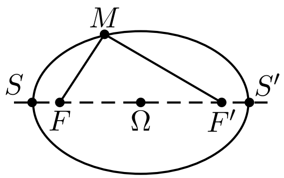
- ➔ une ellipse possède donc un second foyer F' et une seconde directrice, symétriques de F et de $\mathscr{D}$ par rapport à Ω ;
- ➔ l'axe focal passe par le(s) sommet(s) et par le(s) foyer(s) ;
- ➔ la distance entre le centre et un des sommets est appelée demi grand-axe.

Définition

$\boxed{c = \dfrac{1}{2}.FF' = \Omega F}$ est appelé demi distance focale de l'ellipse.

Définition bifocale

Une ellipse de foyers F et F' et de sommets S et S' est l'ensemble des points M du plan tels que $\boxed{MF + MF' = SS'}$.



III. Équation réduite d'une ellipse

Propriété 3

Toute ellipse d'axe focal parallèle à un axe du repère a pour équation :

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1}$$

où a et b sont les demi-axes de l'ellipse et $(x_0\,;\,y_0)$ les coordonnées du centre.

Remarques :

- ➔ Si on pose $a = b$ dans l'équation, on retrouve une équation de cercle (à savoir : $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = a^2$) qui n'est pas une ellipse.
- ➔ Si le centre est O, l'équation devient $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$.

a) Cas où $a > b$

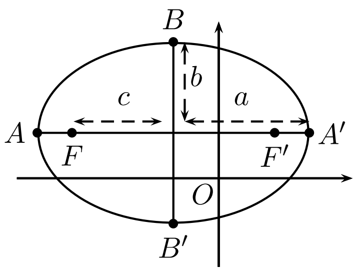
Axe focal : a pour équation $\boxed{y = y_0}$ (parallèle à l'axe des abscisses)

a est le **demi-grand axe**

b est le **demi-petit axe** de l'ellipse

Foyers : $\boxed{F\ (x_0 + c\,;\, y_0)}$; $\boxed{F'\ (x_0 - c\,;\, y_0)}$

où $\boxed{c = \sqrt{a^2 - b^2}}$.



Directrices : d'équations $\boxed{x = x_0 + \dfrac{a^2}{c}}$ et $\boxed{x = x_0 - \dfrac{a^2}{c}}$.

b) Cas où $a < b$

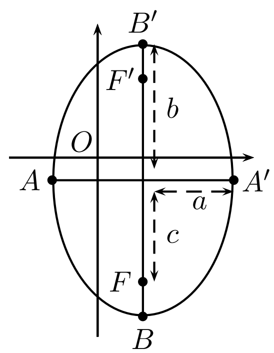
Axe focal : a pour équation $\boxed{x = x_0}$ (parallèle à l'axe des ordonnées).

b est le demi-grand axe de l'ellipse.

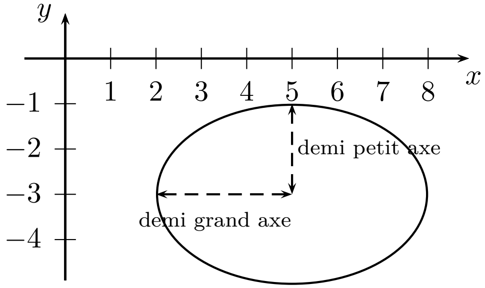
a est le demi-petit axe de l'ellipse.

Foyers : $\boxed{F\ (x_0\,;\, y_0 + c)}$; $\boxed{F'\ (x_0\,;\, y_0 - c)}$ où $\boxed{c = \sqrt{b^2 - a^2}}$.

Directrices : $\boxed{y = y_0 + \dfrac{b^2}{c}}$ et $\boxed{y = y_0 - \dfrac{b^2}{c}}$.



Exemple 1 :
Ci-contre est représentée l'ellipse d'équation $\dfrac{(x-5)^2}{9}+\dfrac{(y+3)^2}{4}=1$.
Le centre Ω a pour coordonnées $(5\,;\,-3)$, le demi grand axe est 3 et le demi petit axe 2. Comme $3>2$ l'axe focal est horizontal, d'équation $y=y_0$ donc $y=-3$.



Les sommets principaux sont à une distance a du centre, en restant sur l'axe focal : ils ont pour coordonnées $(2\,;\,-3)$ et $(8\,;\,-3)$.
$c=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$ et les foyers sont à une distance c du centre, en restant sur l'axe focal : ils ont pour coordonnées $\left(5-\sqrt{5}\,;\,-3\right)$ et $\left(5+\sqrt{5}\,;\,-3\right)$.
Enfin, les directrices (perpendiculaires à l'axe focal donc verticales) ont pour équations $x=5-\dfrac{9}{\sqrt{5}}$ et $x=5+\dfrac{9}{\sqrt{5}}$.

Remarque : suivant les cas, l'excentricité de l'ellipse est $e=\dfrac{c}{a}$ ou $e=\dfrac{c}{b}$. Elle traduit la « déformation » de l'ellipse par rapport à un cercle.

IV. Représentation paramétrique d'une ellipse

Propriété 4

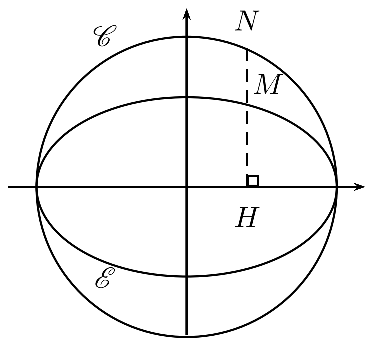
La représentation paramétrique d'une ellipse de centre $\Omega\,(x_0\,;\,y_0)$ et de demi axes a et b est $\boxed{\begin{cases} x=x_0+a\cos t\\ y=y_0+b\sin t\end{cases}}$ *avec* $t\in[\,0\,;\,2\pi\,[$.

Exemple 2 : On considère la courbe paramétrée $\mathscr{C}$ définie par $\begin{cases} x(t)=2+3\cos(2t)\\ y(t)=-1+2\sin(2t)\end{cases}$ pour $t\in\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$. Vérifier que $\mathscr{C}$ est contenue dans une ellipse dont on précisera les éléments caractéristiques.
Réponse : en pensant au fait que $\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1$, on remarque que $\dfrac{x(t)-2}{3}=\cos(2t)$, $\dfrac{y(t)+1}{2}=\sin(2t)$ donc $\dfrac{(x(t)-2)^2}{3^2}+\dfrac{(y(t)+1)^2}{2^2}=1$.
On en déduit que $\mathscr{C}$ est contenue dans une ellipse de centre $\Omega\,(2\,;\,-1)$, de demi grand axe 3, de demi petit axe 2.

V. Tangente à une ellipse

1) Ellipse obtenue par affinité orthogonale

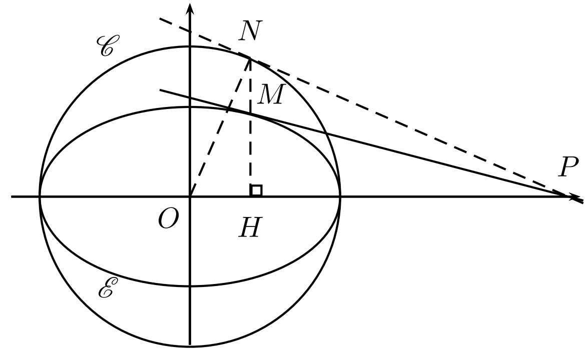
Considérons une ellipse $\mathscr{E}$ de centre O et de demi grand axe a.
Le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon a est appelé **cercle principal** de l'ellipse. Il passe par A et A'. Remarquons que son équation peut s'écrire $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$.
Pour tout point N du cercle, définissons le point M tel que $\overrightarrow{HM}=\dfrac{b}{a}\overrightarrow{HN}$. On dit que M est l'image de N par l'**affinité orthogonale** d'axe $(O;\vec{\imath})$ et de rapport $\dfrac{b}{a}$.



On démontre alors que l'ellipse $\mathscr{E}$ est l'image de $\mathscr{C}$ par cette affinité.

2) Tangente en un point de l'ellipse

Construction de la tangente en un point M :
– contruire le point N du cercle principal "correspondant" à M ;
– contruire la tangente à ce cercle en N (perpendiculaire au rayon) ; elle coupe l'axe des abscisses en un point P



– la tangente recherchée est alors la droite (PM).