Équations de droites et de cercles (dans le plan)

I. Rappels sur les équations de droites

1) Équations cartésiennes, vecteurs directeurs

Propriété 1

Toute droite (d) du plan a des équations cartésiennes de la forme $\boxed{ax + by + c = 0}$.

Remarque

Une droite a une infinité d'équations cartésiennes (proportionnelles entre elles).

Exemple 1

Trouvez une équation cartésienne de la droite (AB) où $A\,(-4\,;\,1)$ et $B\,(4\,;\,3)$.

Réponse :

① $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+4 \\ y-1 \end{pmatrix}$;

② $\det\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AM}\right) = \begin{vmatrix} 8 & x+4 \\ 2 & y-1 \end{vmatrix}$;

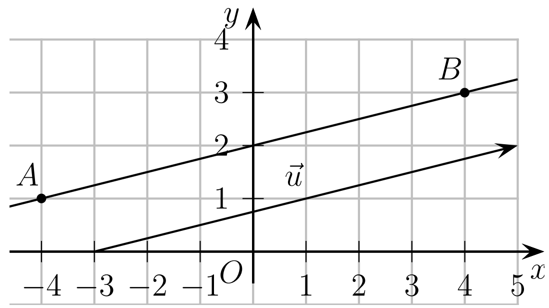
③ $M\,(x\,;\,y) \in (AB) \iff 8(y-1) - 2(x+4) = 0$
$\iff -2x + 8y - 16 = 0 \iff x - 4y + 8 = 0$.

Remarque

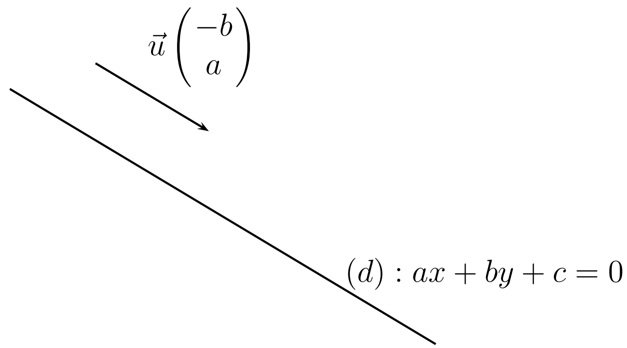
J'ai ici utilisé le fait que le déterminant de deux vecteurs est nul si et seulement si ces vecteurs sont colinéaires.

Définition

Un vecteur non nul $\vec{u}$ est un vecteur directeur d'une droite d s'il existe deux points A et B de d tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.



Propriété 2



Si (d) a pour équation $a\,x + b\,y + c = 0$ alors le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d).

Exemple 2

La droite d'équation $4\,x - 3\,y + 5 = 0$ a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Remarque

➬ Dans l'exemple précédent, tout vecteur colinéaire à $\vec{u}$ sera aussi un vecteur directeur de la droite.
➬ Une droite a une infinité de vecteurs directeurs.

Exemple 3

Trouver une équation cartésienne de la droite (d), de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ et passant par $T\ (2\,;\,-1)$.

<u>Réponse :</u>

Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (d) donc une équation de (d) s'écrit (puisque $-b = 3$ et $a = 4$) : $4\,x - 3\,y + c = 0$.
En remplaçant x et y par les coordonnées de T : $4\times 2 - 3\times(-1) + c = 0$ donne $11 + c = 0$ donc $c = -11$.
(d) a donc pour équation cartésienne $4\,x - 3\,y - 11 = 0$.

Exemple 1

Retrouver une équation cartésienne de la droite (AB) où $A\ (-4\,;\,1)$ et $B\ (4\,;\,3)$.

<u>Réponse :</u>

Le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) donc une équation de (AB) s'écrit (puisque $-b = 8$ et $a = 2$) : $2x - 8y + c = 0$.
En remplaçant x et y par les coordonnées de A (ou de B) : $2\times(-4) - 8\times 1 + c = 0$ donne $-16 + c = 0$ donc $c = 16$.
(AB) a donc pour équation cartésienne $2x - 8y + 16 = 0$ ou encore $x - 4y + 8 = 0$.

Exemple 3

Trouver une équation cartésienne de la droite (d'), parallèle à la droite (d) : $4\,x - 3\,y + 11 = 0$ et passant par $E\ (5\,;\,-2)$.

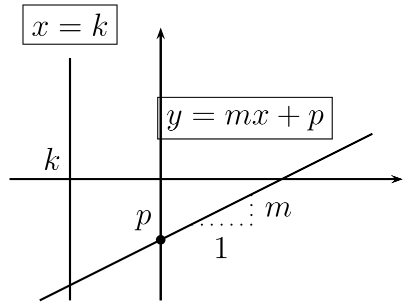
<u>Réponse :</u>

Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (d) donc c'est aussi un vecteur directeur de (d').
Une équation de (d') s'écrit donc (puisque $-b = 3$ et $a = 4$) : $4\,x - 3\,y + c = 0$.
En remplaçant x et y par les coordonnées de E : $4\times 5 - 3\times(-2) + c = 0$ donne $26 + c = 0$ donc $c = -26$.
(d') a donc pour équation cartésienne $4\,x - 3\,y - 26 = 0$.

2) Équations réduites, coefficients directeurs

Propriété 3

L'équation $ax + by + c = 0$ peut s'écrire, selon les cas, sous l'une des deux formes réduites suivantes : $\boxed{y = mx + p}$ ou $\boxed{x = k}$.
Le coefficient m est le coefficient directeur de la droite et p est son ordonnée à l'origine.



Propriété 4

Si $x_A \neq x_B$ alors la droite (AB) a un coefficient directeur égal à $\boxed{m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$.

Exemple 1

Trouver l'équation réduite de la droite (AB).

Réponse :

— je calcule le coefficient directeur $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$;

— l'équation réduite s'écrit donc $y = \dfrac{1}{4}x + p$;

— pour trouver p, je remplace x et y par les coordonnées de A (ou de B) : $1 = \dfrac{1}{4} \times (-4) + p$ donc $p = 2$;

— l'équation réduite de la droite (AB) est $y = \dfrac{1}{4}x + 2$ (ce qui est équivalent à $x - 4y + 8 = 0$).

Remarque

➾ Si je connais une équation cartésienne, je peux trouver l'équation réduite, ainsi, dans l'exemple précédent :

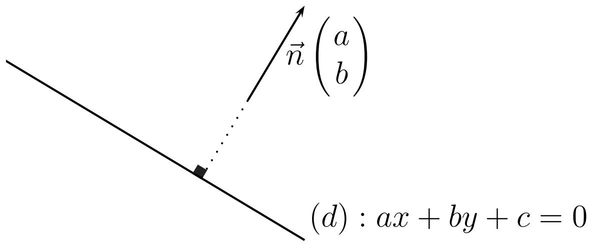
$x - 4y + 8 = 0 \iff 4y = x + 8 \iff y = \dfrac{1}{4}x + 2.$

➾ Une droite n'a qu'une seule équation réduite mais une infinité d'équations cartésiennes.

II. Vecteurs normaux. Projeté orthogonal

1) Vecteurs normaux

Propriété 5



Si (d) a pour équation $a\,x + b\,y + c = 0$ alors le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de (d).

Exemple 3

La droite $(d) : 4\,x - 3\,y + 11 = 0$, a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Remarque

➾ Dans l'exemple précédent, tout vecteur colinéaire à $\vec{n}$ sera aussi un vecteur normal de (d).

➾ Une droite a une infinité de vecteurs normaux.

Exemple 4

Trouver une équation de la droite (d), de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ et passant par $K\ (6\,;\,-5)$.

Réponse :

D'après la propriété 5, une équation de (d) s'écrit $-4\,x + 7\,y + c = 0$.
En remplaçant x et y par les coordonnées de K, nous trouvons $-24 - 35 + c = 0$ d'où $c = 59$ donc $(d) : -4\,x + 7\,y + 59 = 0$.

Exemple 1

Trouver une équation cartésienne de la droite (d''), perpendiculaire à la droite (AB) et passant par $C\ (-1\,;\,2)$.

Réponse : Le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de la droite (d'') donc une équation de (d'') s'écrit $8\,x+2\,y+c=0$.
En remplaçant x et y par les coordonnées de C, nous trouvons $-8+4+c=0$ d'où $c=4$ donc (d'') a pour équation $8\,x+2\,y+4=0$ ou encore $4\,x+y+2=0$.

Exemple 3

Trouver une équation cartésienne de la droite (Δ), perpendiculaire à la droite (d) : $4\,x-3\,y+11=0$ et passant par $E\ (5\,;\,-2)$.

Réponses :

Méthode 1 :

Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (d) donc un vecteur normal de (Δ) ; une équation de (Δ) s'écrit donc (puisque $a=3$ et $b=4$) : $3\,x+4\,y+c=0$.
En remplaçant x et y par les coordonnées de E, nous trouvons $c=-7$ donc (Δ) a pour équation $3\,x+4\,y-7=0$.

Méthode 2 :

① Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de la droite (d) ;

② $M\in(\Delta) \iff \overrightarrow{EM}$ colinéaire à $\vec{n} \iff \det\left(\overrightarrow{EM};\vec{n}\right)=0$;

③ $\overrightarrow{EM}\begin{pmatrix}x-5\\y+2\end{pmatrix}$ et $\det\left(\overrightarrow{EM};\vec{n}\right)=\begin{vmatrix}x-5 & 4\\ y+2 & -3\end{vmatrix}=-3\,x-4\,y+7$;

④ $M\in(\Delta) \iff -3\,x-4\,y+7=0 \iff 3\,x+4\,y-7=0$; ceci est donc une équation de Δ.

Méthode 3 : trouver deux points de la droite (d) et procéder comme dans l'exemple précédent.

Remarques

➩ Il est vivement conseillé de faire une figure, au minimum au brouillon et au mieux sur Geogebra.
➩ Nous pouvions aussi utiliser le produit scalaire pour trouver l'équation de (d'').

2) Coordonnées d'un projeté orthogonal

Exemple 1

Trouver les coordonnées du projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

Réponse : soit H ce point ; alors H est le point d'intersection de (AB) et de (d''). Je résous donc le système : $\begin{cases}x-4\,y+8=0\\4\,x+y+2=0\end{cases}$

en multipliant la première équation par 4 : $\begin{cases}4\,x-16\,y+32=0\\4\,x+y+2=0\end{cases}$

puis en soustrayant les deux lignes : $-17\,y+30=0$ donc $y=\dfrac{30}{17}$

puis $4\,x+\dfrac{30}{17}+2=0$ donne $(\ldots)$ $x=-\dfrac{64}{17}\div 4=-\dfrac{16}{17}$.

Donc les coordonnées du projeté orthogonal du point C sur la droite (AB) sont $\left(-\dfrac{16}{17}\,;\,\dfrac{30}{17}\right)$.

Remarque

➩ Il est parfois nécessaire de multiplier chaque ligne du système par un coefficient différent.
➩ Une fois les coordonnées du projeté orthogonal connues, il est simple de calculer la distance entre un point et une droite (ainsi que l'aire d'un triangle).

III. Équation d'un cercle dans le plan

1) Définition et expression

Définition

Une équation de cercle est une égalité que doivent vérifier les coordonnées d'un point pour que ce point soit sur le cercle.

Propriété 6

Le cercle de centre $\Omega\,(a\,;\,b)$ et de rayon R a pour équation

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

Démonstration

Le cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M tels que $\Omega M = R$. Donc :

$M\ (x\,;\,y)\in\mathscr{C} \iff \Omega M^2 = R^2 \iff (x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

Remarque

L'équation d'un cercle est une écriture de la relation de Pythagore.

Exemple 5

Le cercle de centre $\Omega\,(1\,;\,-6)$ et de rayon 10 a pour équation $(x-1)^2+(y+6)^2=100$.

2) Cercle défini par un diamètre

Exemple 6

Déterminer l'équation du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[FG]$, où $F\ (-4\,;\,-1)$ et $G\ (2\,;\,5)$.

Réponses :

Méthode 1 :

① Je calcule les coordonnées du centre du cercle Ω, qui est le milieu de $[FG]$:
$x_\Omega = \dfrac{x_F+x_G}{2} = \dfrac{-4+2}{2} = -1$ et $y_\Omega = \dfrac{y_F+y_G}{2} = \dfrac{-1+5}{2} = 2$
donc $\Omega\ (-1\,;\,2)$;

② Je calcule le rayon du cercle :
$R=\Omega G = \sqrt{(2-(-1))^2+(5-2)^2} = \sqrt{18}$;

③ L'équation du cercle $\mathscr{C}$ est donc $(x+1)^2+(y-2)^2=18$.

Méthode 2 :

Je peux aussi utiliser une propriété géométrique : « Un point M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si le triangle ABM est rectangle en ce point ».

Donc :

$M\in\mathscr{C} \iff FGM$ est rectangle en $M \iff \overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{GM}=0 \iff$
$(x+4)(x-2)+(y+1)(y-5)=0 \iff x^2+2x+y^2-4y-13=0 \iff$
$(x+1)^2-1+(y-2)^2-4-13=0 \iff (x+1)^2+(y-2)^2=18$.

Voir le 3) pour une explication de la fin du calcul.

3) Reconnaître une équation de cercle

L'objectif est ici de savoir si une équation donnée est celle d'un cercle, et, dans l'affirmative, de donner son centre et son rayon.

La technique est celle de la mise sous forme canonique : il faut voir si l'on peut utiliser l'identité remarquable $(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$.

Exemple 7

Vérifier que $x^2+y^2-4x+y+3=0$ est l'équation d'un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Réponse :

Nous avons :

$x^2-4x=(x^2-4x+4)-4=(x-2)^2-4$

$y^2-y=\left(y^2-2\times y\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

donc

$x^2+y^2-4x+y+3=0 \Longleftrightarrow (x-2)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$: l'équation est bien celle d'un cercle, de centre $\Omega\left(2\,;-\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

4) Intersection avec une droite parallèle aux axes

Exemple 8

Soit le cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega\,(-5\,;\,2)$ et de rayon $R=4$.

Déterminer les coordonnées des points du cercle $\mathscr{C}$ d'abcisse 0 ou d'ordonnée 5.

Réponses :

Pour les points d'abscisse 0 : je résous le système

$$\begin{cases}\boxed{x}=\boxed{0}\\(\boxed{x}+5)^2+(y-2)^2=16\end{cases}$$

qui donne $(0+5)^2+(y-2)^2=16$ donc $(y-2)^2=16-25=-9$.

Le carré d'un réel est toujours positif donc cette équation n'a pas de solution : le cercle $\mathscr{C}$ n'a pas de points d'abscisse 0.

Pour les points d'ordonnée 5 : je résous le système

$$\begin{cases}\boxed{y}=\boxed{5}\\(x+5)^2+(\boxed{y}-2)^2=16\end{cases}$$

qui donne $(x+5)^2+(5-2)^2=16$ donc $(x+5)^2=16-9=7$ d'où $x+5=\pm\sqrt{7}$ donc $x=-5\pm\sqrt{7}$.

Le cercle $\mathscr{C}$ a deux points d'ordonnée 5 : $M_1\left(-5-\sqrt{7}\,;\,5\right)$ et $M_2\left(-5+\sqrt{7}\,;\,5\right)$.

Remarque

Il est également possible de déterminer l'intersection d'une droite quelconque et d'un cercle ou de deux cercles grâce aux équations du second degré.