Dérivation (2)

I. Calculs de dérivées

1) Rappels

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k une constante. Nous avons déjà vu dans un précédent chapitre que les fonctions $k.u$, $u+v$ et $u-v$ sont dérivables sur I et que leur fonctions dérivées s'écrivent :

$\boxed{(k.u)' = k.u'}$ $\boxed{(u+v)' = u'+v'}$ $\boxed{(u-v)' = u'-v'}$.

2) Dérivée d'un produit

Définition

Soient u une fonction définie sur J et v une fonction définie sur K. Alors $u \times v$ est définie sur $I = J \cap K$ par $(u \times v)(x) = u(x) \times v(x)$.

Exemple 1

Si u est définie sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$ par $u(x) = \sqrt{x}$ et v est définie sur $]\,-\infty\,;\,2\,]$ par $v(x) = \sqrt{2-x}$ alors $u \times v$ est définie sur $[\,0\,;\,2\,]$ par $(u \times v)(x) = \sqrt{x}\sqrt{2-x}$.

Remarques

- nous écrirons uv au lieu de $u \times v$;
- soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\,x$, sa dérivée est alors $f'(x) = 2 \times 1 = 2$.

Remarquons maintenant que $f = u\,v$ où $u(x) = 2$ et $v(x) = x$, nous avons alors $(u\,v)'(x) = f'(x) = 2$ tandis que $(u'\,v')(x) = 0 \times 1 = 0$. Par conséquent : $(uv)' \neq u'v'$. Cet exemple illustre le fait que la dérivée d'un produit n'est pas le produit des dérivées.

Théorème 1

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Alors $u \times v$ est dérivable sur I et :

$$\boxed{(u \times v)' = u' \times v + u \times v'}$$

Démonstration « remarquable »

Soit $a \in I$. Calculons le taux de variation $\tau(h)$ de la fonction $u \times v$ entre a et $a+h$:

$$\begin{aligned}
\tau(h) &= \frac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h} = \frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a)}{h} \\
&= \frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a+h)+u(a)v(a+h)-u(a)v(a)}{h} \\
&= \frac{u(a+h)-u(a)}{h} \times v(a+h) + \frac{v(a+h)-v(a)}{h} \times u(a).
\end{aligned}$$

Comme u et v sont dérivables en a, $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{u(a+h)-u(a)}{h} = u'(a)$ et $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{v(a+h)-v(a)}{h} = v'(a)$.

Par ailleurs, $\displaystyle\lim_{h\to 0} v(a+h) = v(a)$ (c'est une conséquence de la dérivabilité de v en a).

Donc $\displaystyle\lim_{h\to 0} \tau(h) = u'(a)v(a) + v'(a)u(a)$, ce qui établit la dérivabilité de uv en a ainsi que la formule cherchée.

Exemples 2

Justifiez la dérivabilité des fonctions suivantes sur un certain intervalle et calculez leur fonction dérivée :

$$f(x) = (3\,x-4)\sqrt{x} \quad ; \quad g(x) = \frac{2\,x^5 - x^2 + 3}{x}.$$

Réponses :

f est de la forme uv où $u(x) = 3\,x-4$ et $v(x) = \sqrt{x}$; u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et v est dérivable sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ donc f est dérivable sur

$]0\,;+\infty[$.

Par ailleurs, $u'(x)=3$ et $v'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= (u'v+uv')(x)=3\times\sqrt{x}+(3\,x-4)\times\frac{1}{2\sqrt{x}}\\ &= \frac{6\,x+3\,x-4}{2\sqrt{x}}=\frac{9\,x-4}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

En remarquant que $\dfrac{2\,x^5-x^2+3}{x}=(2\,x^5-x^2+3)\times\dfrac{1}{x}$, g est de la forme uv où $u(x)=2\,x^5-x^2+3$ et $v(x)=\dfrac{1}{x}$;

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et v est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Par ailleurs, $u'(x)=10\,x^4-2\,x$ et $v'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ donc

$$\begin{aligned} g'(x) &= (u'v+uv')(x)\\ &= (10\,x^4-2\,x)\times\frac{1}{x}+(2\,x^5-x^2+3)\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)\\ &= \frac{10\,x^5-2\,x^2-(2\,x^5-x^2+3)}{x^2}=\frac{8\,x^5-x^2-3}{x^2}. \end{aligned}$$

Remarque : g pouvait être ici transformée en somme :

$g(x)=\dfrac{2\,x^5-x^2+3}{x}=\dfrac{2\,x^5}{x}-\dfrac{x^2}{x}+\dfrac{3}{x}=2\,x^4-x+3\times\dfrac{1}{x}$ donc

$g'(x)=8\,x^3-1-\dfrac{3}{x^2}$.

3) Dérivée d'un quotient

Définition

Soient u une fonction définie sur J et v une fonction définie sur K.
Soit L l'ensemble des x de K tels que $v(x)\neq 0$.

Alors $\dfrac{u}{v}$ est la fonction définie sur $J\cap L$ par $\left(\dfrac{u}{v}\right)(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$.

Exemple 3

Si u est définie sur $]-\infty\,;2]$ par $u(x)=\sqrt{2-x}$ et v est définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x)=x^2-1$ alors la fonction $\dfrac{u}{v}$ est définie sur $]-\infty\,;-1[\,\cup\,]-1\,;1[\,\cup\,]1\,;2]$ par $\left(\dfrac{u}{v}\right)(x)=\dfrac{\sqrt{2-x}}{x^2-1}$.

Théorème 2

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Alors $\dfrac{u}{v}$ et $\dfrac{1}{v}$ (il faut que $v(x)\neq 0$ pour tout $x\in I$) sont dérivables sur I et :

$$\boxed{\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}} \qquad \boxed{\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}}$$

Exemples 4

Justifiez la dérivabilité des fonctions suivantes sur un certain intervalle et calculez leur fonction dérivée :

$f(x)=\dfrac{1}{4\,x-7}$; $g(x)=\dfrac{3\,x-4}{x^2+x+1}$; $h(x)=\dfrac{5}{2\,x+4}-\dfrac{5\,x-2}{x+1}$.

Réponses :

f est de la forme $\dfrac{1}{v}$ où $v(x)=4\,x-7$;

v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et s'annule en $7/4$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{7/4\}$.

Par ailleurs, $v'(x)=4$ donc $f'(x)=-\dfrac{v'}{v^2}(x)=-\dfrac{4}{(4\,x-7)^2}$.

g est de la forme $\dfrac{u}{v}$ où $u(x)=3\,x-4$ et $v(x)=x^2+x+1$;

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ (discriminant négatif) donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs, $u'(x)=3$ et $v'(x)=2\,x+1$ donc

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{u'v - uv'}{v^2}(x) \\ &= \frac{3 \times (x^2 + x + 1) - (3\,x - 4) \times (2\,x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} \\ &= \frac{3\,x^2 + 3\,x + 3 - (6\,x^2 + 3\,x - 8\,x - 4)}{(x^2 + x + 1)^2} \\ &= \frac{-\,3\,x^2 + 8\,x + 7}{(x^2 + x + 1)^2}. \end{aligned}$$

$h(x) = h_1(x) - h_2(x)$ où $h_1(x) = \dfrac{5}{2\,x + 4}$ et $h_2(x) = \dfrac{5\,x - 2}{x + 1}$.

En remarquant que $\dfrac{5}{2\,x + 4} = 5 \times \dfrac{1}{2\,x + 4}$, h_1 est de la forme $k \times \dfrac{1}{v}$ où $k = 5$ et $v(x) = 2\,x + 4$;

v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et s'annule en -2 donc h_1 est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ et $h_1'(x) = 5 \times \left(-\dfrac{2}{(2\,x + 4)^2}\right) = -\dfrac{10}{(2\,x + 4)^2}$.

h_2 est de la forme $\dfrac{u}{v}$ où $u(x) = 5\,x - 2$ et $v(x) = x + 1$;

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et s'annule en -1 donc h_2 est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

Par ailleurs, $u'(x) = 5$ et $v'(x) = 1$ donc

$h_2'(x) = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}(x) = \dfrac{5 \times (x + 1) - (5\,x - 2) \times 1}{(x + 1)^2} = \dfrac{7}{(x + 1)^2}$.

Conclusion : h est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-2; -1\}$ et

$h'(x) = h_1'(x) - h_2'(x) = -\dfrac{10}{(2\,x + 4)^2} - \dfrac{7}{(x + 1)^2}$.

Remarque

Il est rarement utile de développer le carré présent au dénominateur.

4) Dérivées de certaines fonctions composées

Propriété 1

Soient a et b deux réels, soit g une fonction dérivable sur J.
Soit I l'ensemble des réels x tels que $a\,x + b \in J$.
Alors la fonction f définie sur un certain ensemble par $f(x) = g(a\,x + b)$ est dérivable sur I et on a :

$$\boxed{f'(x) = a.g'(a\,x + b)}.$$

Exemples 5

Justifiez la dérivabilité des fonctions suivantes sur un certain intervalle et calculez leur fonction dérivée :

$$f_1(x) = (-3\,x + 5)^7 \quad ; \quad f_2(x) = \sqrt{1 - 4\,x}.$$

Réponses :

$f_1(x) = g(a\,x + b)$ où $g(x) = x^7$ et $a = -3$, $b = 5$;

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f_1 aussi.

Par ailleurs, $g'(x) = 7\,x^6$ donc $g'(-3\,x + 5) = 7\,(-3\,x + 5)^6$ d'où $f_1'(x) = -3 \times 7\,(-3\,x + 5)^6 = -21\,(-3\,x + 5)^6$.

$f_2(x) = g(a\,x + b)$ où $g(x) = \sqrt{x}$ et $a = -4$, $b = 1$;

g est dérivable sur $\left]0\,;\,+\infty\right[$ donc il faut que $1 - 4\,x > 0$.

Or : $1 - 4\,x > 0 \iff -4\,x > -1 \iff x < 1/4$ donc f_2 est dérivable sur $\left]-\infty\,;\,1/4\right[$.

Par ailleurs, $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ donc $g'(1 - 4\,x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1 - 4\,x}}$ d'où

$f_2'(x) = -4 \times \dfrac{1}{2\sqrt{1 - 4\,x}} = \dfrac{-2}{\sqrt{1 - 4\,x}}$.

II. Variations et extrema d'une fonction

1) Étude des variations d'une fonction

Remarques

➫ nous avons vu dans un précédent chapitre que $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f en son point d'abscisse a ;
➫ si ce coefficient est positif alors cette tangente « monte » donc la fonction f est croissante « au voisinage de a » ;
➫ nous pouvons donc conjecturer que si $f'(a)$ reste positif sur un intervalle alors f devrait être croissante sur cet intervalle. Cette conjecture se démontre et est donc une propriété.

Théorème 3

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
• Si $f' = 0$ sur I alors f est constante sur I.
• Si $f' > 0$ (resp. $f' < 0$) sur I sauf en certains points où f' s'annule alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I

Remarques

➫ Ce théorème, parfois appelé théorème de Lagrange, est l'un des plus utilisés en mathématiques !
➫ Ne confondez pas le signe de f et celui de f'...
➫ Pour étudier les variations d'une fonction f, nous pouvons donc :

① calculer la dérivée f' de la fonction f ;
② étudier le signe de f' ;
③ faire le tableau du signe de f', celui-ci donnant le sens de variation de f.

Exemple 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x + 7$. Nous avons $f'(x) = -3 < 0$ pour tout x : f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exemple 7

Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$ par

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 4}{x + 3}.$$

① $f'(x) = \dfrac{(2x+3)(x+3) - 1.(x^2+3x+4)}{(x+3)^2} = \dfrac{x^2+6x+5}{(x+3)^2}$.
② $(x+3)^2$ est toujours positif donc $f'(x)$ a le même signe que $x^2 + 6x + 5$. Cette fonction du second degré a le signe de $a = 1$ donc est positive sauf entre les racines $(\ldots)$ $x_1 = -1$ et $x_2 = -5$.
③ En remarquant que -3 est une valeur interdite, ceci donne le tableau suivant :

x	$-\infty$		-5		-3		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	-7	↘	‖	↘	1	↗	

Remarque : les « valeurs » manquantes de f, à certaines extrémités des flèches sont appelées limites de f en $-\infty$ et en $-\infty$ (hors-programme de première).

2) Cas des fonctions du second degré

Exemple 8

Étude des variations d'une fonction du second degré, par exemple $f(x) = -3\,x^2 + 18\,x + 5$ sur $\mathbb{R}$.
① $f'(x) = -6\,x + 18$.
② Le signe de $f'(x)$ dépend ici de x :
$f'(x) > 0 \iff -6\,x + 18 > 0 \iff -6\,x > -18 \iff x < 3$.
③ Voici donc le tableau de signe de f' et de variation de f :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
Signe de f'		$+$	0	$-$	
Variations de f		$\nearrow$	32	$\searrow$	

Généralisons cet exemple pour une fonction du second degré quelconque :

Propriété 2

Tableaux de variations de f définie par $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ sur $\mathbb{R}$:

Si $a > 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2\,a}$		$+\infty$
Signe de f'		$-$	0	$+$	
Variations de f		$\searrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\nearrow$	

Si $a < 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2\,a}$		$+\infty$
Signe de f'		$+$	0	$-$	
Variations de f		$\nearrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\searrow$	

Démonstration

① $f'(x) = a\,x + b$.

② Le signe de $f'(x)$ dépend ici de x :

$$f'(x) > 0 \iff 2a\,x + b > 0 \iff 2a\,x > -b$$

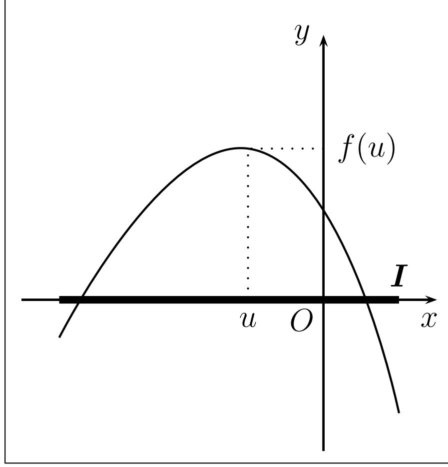
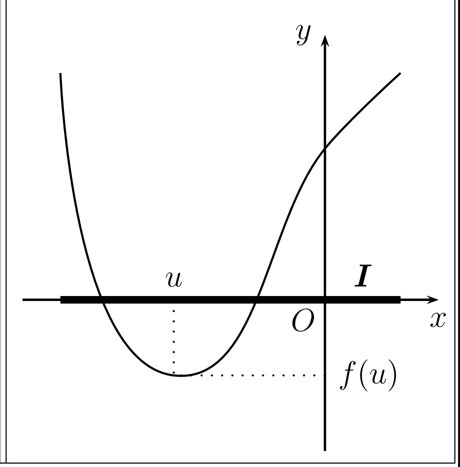
$$\iff x > -\frac{b}{2\,a} \text{ si } a > 0 \text{ ou } x < -\frac{b}{2\,a} \text{ si } a < 0.$$

③ Donc si $a > 0$ alors f est strictement croissante sur $\left]-\frac{b}{2\,a}\,;\,+\infty\right[$ et si $a < 0$ alors f l'est sur $\left]-\infty\,;\,-\frac{b}{2\,a}\right[$.

3) Extremum d'une fonction

Définition

Soit f une fonction définie sur I et u un nombre appartenant à I.

Le nombre $f(u)$ est le maximum de f sur I si, pour tout x de I, on a $f(x) \leqslant f(u)$.	Le nombre $f(u)$ est le minimum de f sur I si, pour tout x de I, on a $f(x) \geqslant f(u)$.
	

Remarques

- un extremum est un maximum ou un minimum ;
- s'il n'est un extremum que sur un sous-intervalle de l'ensemble de définition, nous disons qu'il est local ; dans l'exemple 7, -7 est un maximum local car il n'est maximum que sur $]-\infty\,;\,-3[$;
- si $f(u)$ est un extremum (local ou non) alors $f'(u) = 0$;
- la réciproque est fausse : si $f(x) = x^3$ alors $f'(0) = 3 \times 0^2 = 0$ mais f n'a aucun extremum en 0.

Propriété 3

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $a \in I$.
f a un extremum (maximum ou minimum) local ou global en a si et seulement si f' s'annule en a en changeant de signe.

Exemple 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 + 4x^3 - 16x + 2$.
Prouver que $f'(x) = 4(x+2)^2(x-1)$. En déduire l'existence ou non d'extrema pour f.

Réponse :

① D'une part, $f'(x) = 4x^3 + 12x^2 - 16$.
D'autre part,

$$\begin{aligned} 4(x+2)^2(x-1) &= 4(x^2+4x+4)(x-1) \\ &= 4(x^3+4x^2+4x-x^2-4x-4) \\ &= 4x^3+12x^2-16 = f'(x). \end{aligned}$$

② $4(x+2)^2$ reste positif (mais s'annule en -2) donc $f'(x)$ a le signe de $x-1$ et nous savons que $x-1>0 \iff x>1$.

③ D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
4		$+$		$+$		$+$	
$(x+2)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de f'		$-$	0	$-$	0	$+$	
Variation de f		$\searrow$	18	$\searrow$	-9	$\nearrow$	

④ f' s'annule en 1 en changeant de signe donc $f(1) = -9$ est un extremum local (ici un minimum local).
Par contre, f' s'annule en -2 sans changer de signe donc $f(-2) = 18$ n'est pas un extremum.

Remarque

En présence d'un extremum, puisque la dérivée s'annule, il y a une tangente horizontale.

4) Utilisation d'extrema pour prouver des inégalités

Exemple 10

Prouver que, pour tout x réel positif, $\sqrt{1+2x} \leqslant 1+x$.

Réponse :

Soit f la fonction définie sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$ par $f(x) = 1+x-\sqrt{1+2x}$.
Nous devons prouver que f reste positive, pour cela, nous allons ici prouver que f a un minimum positif.

Pour tout x de $[\,0\,;\,+\infty\,[$, $f'(x) = 1 - \dfrac{2}{2\sqrt{1+2x}} = \dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{\sqrt{1+2x}}$.

Le dénominateur est toujours positif. Pour le numérateur remarquons que :

$$\begin{aligned} x \in [\,0\,;\,+\infty\,[&\implies x \geqslant 0 \implies 2x \geqslant 0 \implies 1+2x \geqslant 1 \\ &\implies^{(*)} \sqrt{1+2x} \geqslant \sqrt{1} \implies \sqrt{1+2x}-1 \geqslant 0. \end{aligned}$$

$^{(*)}$ car la fonction racine carrée est croissante.

Le numérateur est donc aussi positif donc $f'(x) \geqslant 0$ sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$: la fonction f est croissante sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$ donc elle a pour minimum $f(0) = 1+0-\sqrt{1+2\times 0} = 0$.
Comme elle a un minimum positif, f reste positive.
Remarque : il y avait ici une démonstration alternative, ne nécessitant pas l'utilisation de la dérivée (en développant $(1+x)^2$), mais ce n'est pas toujours le cas...

5) Étude de la position relative de deux courbes

Remarques

➩ soient f et g deux fonctions. La courbe de f est au dessus de celle de g quand $f(x) > g(x)$, autrement dit quand $f(x)-g(x) > 0$ et elle est en dessous de celle de g quand $f(x)-g(x) < 0$;

➩ si j'appelle h la fonction définie (sur un certain ensemble) par $h(x) = f(x)-g(x)$, l'étude des variations de h peut permettre de savoir à quel moment $h(x)$ est positif ou négatif.

Exemple 11

Étudier les positions relatives de la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ et de sa tangente en son point d'abscisse 2.

Réponse :

L'équation de cette tangente est $y = f'(2)(x-2)+f(2) = 12\,x-16$.
La courbe de f est au dessus de sa tangente quand $f(x) > 12\,x-16$ donc quand $f(x)-(12\,x-16) > 0$.

Soit donc h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = x^3-(12\,x-16) = x^3-12\,x+16.$$

Alors $h'(x) = 3\,x^2-12 = 3(x^2-4) = 3(x-2)(x+2)$.

D'où le tableau de variations de h :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
3		$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de h'		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variation de h		$\nearrow$	32	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Il semblerait (calculatrice graphique...) que $h(-4) = 0$ et, en effet :
$h(-4) = (-4)^3-12(-4)+16 = -64+48+16 = 0$.

Donc, d'après le tableau de variations de h :

• sur $]-\infty\,;\,-4[$: $h(x) < 0$ donc la courbe est en dessous de sa tangente ;

• sur $]-4\,;\,+\infty[$: $h(x) \geqslant 0$ donc la courbe est au dessus de sa tangente.