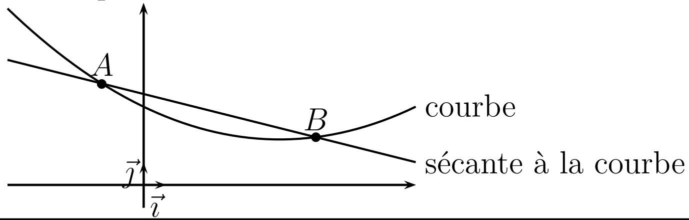
Dérivation (1)

I. Sécantes à la courbe représentative d'une fonction en un point. Taux de variation.

Définition

Une sécante à la courbe représentative d'une fonction est une droite passant par deux points de cette courbe.



Remarques

➯ Si nous notons a et b les abscisses respectives des points A et B alors les coordonnées de ces points s'écrivent : $A\ (a\,;\ f(a))$ et $B\ (b\,;\ f(b))$.

➯ Le coefficient directeur d'une sécante s'écrit donc :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

➯ Si f est croissante (respectivement décroissante) entre a et b alors m ¿ 0 (respectivement m 6 0). La réciproque est fausse.

Définition

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a, b appartenant à I. On appelle taux de variation de la fonction f entre a et b le nombre :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Exemple 1

Calcul du taux de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4\,x + 3$ entre 2 et 5 : $\frac{f(5)-f(2)}{5-2} = \frac{-17-(-5)}{3} = \frac{-12}{3} = -4$.

Remarques

➯ Ce nombre est le coefficient directeur de la sécante passant par les points $A\ (a\,;\ f(a))$ et $B\ (b\,;\ f(b))$.

➯ Pour une fonction affine, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a\,x + b$, le taux de variation est le coefficient a (cf. exemple 1) puisque la sécante est confondue avec la courbe représentative de la fonction.

➯ En sciences physiques, si l'on considère que $f(x) = y$ alors le taux de variation s'écrit $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Si une quantité q évolue en fonction du temps t alors le taux de variation, noté $\frac{\Delta q}{\Delta t}$, représente la vitesse moyenne d'évolution de la quantité q pendant le temps Δt.

➯ En économie, le coût marginal est le coût engendré par la fabrication d'un objet supplémentaire :
$C_m(n) = C(n+1) - C(n) = \frac{C(n+1)-C(n)}{(n+1)-n}$.

Exemple 2

Une balle lâchée d'une certaine hauteur parcourt en un temps t (en secondes) une distance $d(t) = 4{,}9\,t^2$ (en mètres). Calculez la vitesse moyenne de la balle entre les temps $t = 1$ et $t = 4$.

<u>Réponse :</u>

En une seconde, la balle parcourt $d(1) = 4{,}9 \times 1^2 = 4{,}9$ mètres ; en quatre secondes, la balle parcourt $d(4) = 4{,}9 \times 4^2 = 78{,}4$ mètres donc, entre les temps $t = 1$ et $t = 4$, elle parcourt $78{,}4 - 4{,}9 = 73{,}5$ mètres en 3 secondes, la vitesse moyenne est $73{,}5 \div 3 = 24{,}5$ m/s.

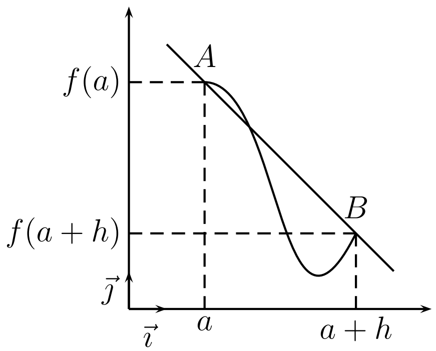
Par ailleurs, le taux de variation de d entre les temps $t = 1$ et $t = 4$ est $\frac{d(4)-d(1)}{4-1} = \frac{78{,}8-4{,}9}{3} = \frac{73{,}5}{3} = 24{,}5$.

Remarques

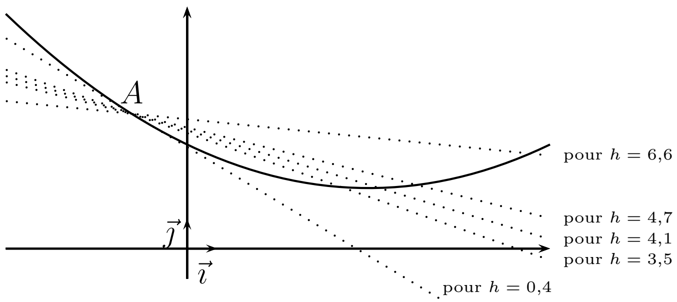
➭ Si nous écrivons $b = a + h$ (ce qui est toujours possible), alors le taux de variation s'écrit aussi :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

➭ C'est alors le coefficient directeur d'une sécante quelconque passant par A.



➭ En faisant varier h, nous pouvons obtenir toutes les sécantes passant par A. De plus, quand h est proche de 0, la sécante est très proche de la courbe au voisinage de A.



Exemple 3

Soit f la fonction carré. Alors le taux de variation de cette fonction entre 1 et $1 + h$ est :

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2-1^2}{h} = \frac{1^2+2h+h^2-1}{h} = \frac{2h+h^2}{h} = 2+h.$$

Ainsi, le taux de variation entre 1 et 4 est, en remarquant que l'écart entre 1 et 4 est $h = 4 - 1 = 3$: $\quad 2 + h = 2 + 3 = 5$.

Remarque : quand $h \simeq 0$, ce taux de variation est proche de 2.

II. Nombre dérivé. Tangente à la courbe représentative d'une fonction en un point

1) Nombre dérivé d'une fonction en un point

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un nombre appartenant à I.

La fonction f est dérivable en a si les nombres $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ se rapprochent d'un nombre quand h se rapproche vers 0.

Ce nombre est alors appelé nombre dérivé de f en a et noté $f'(a)$.

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}.$$

Exemple 3

Le taux de variation de la fonction carré entre 1 et $1 + h$ est : $\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 2 + h$, qui tend vers 2 quand h tend vers 0.

La fonction carré est donc dérivable en 1 et le nombre dérivé de cette fonction en 1 est $f'(1) = 2$.

Exemple 4

La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

En effet, $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|h|}{h}$ qui est égal à 1 si $h > 0$ et à -1 si $h < 0$ donc $\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ ne tend pas vers un nombre quand h tend vers 0.

Démonstration « remarquable »

La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

En effet, $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{(\sqrt{h})^2} = \frac{1}{\sqrt{h}}$ et ce nombre devient très grand (il tend vers $+\infty$) quand h se rapproche de 0.

Exemple 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3\,x^2 + 1$.
Nous aimerions savoir si f est dérivable en 3.

Remarquons d'abord que $f(3) = 3^3 - 3 \times 3^2 + 1 = 1$ puis observons le taux de variation entre $a = 3$ et $3 + h$ avec h qui tend vers 0 :

h	1	0,5	0,1	0,01	0,001
$f(3+h)$	17	7,125	1,961	1,09	1,009
$f(3+h) - f(3)$	16	6,125	0,961	0,09	0,009
$\dfrac{f(3+h) - f(3)}{h}$	16	12,25	9,61	9,06	9,006

Ainsi, il semblerait que f soit dérivable en 3 et que $f'(3) = 9$.
Pour un exemple de démonstration rigoureuse, voir l'exemple 3.

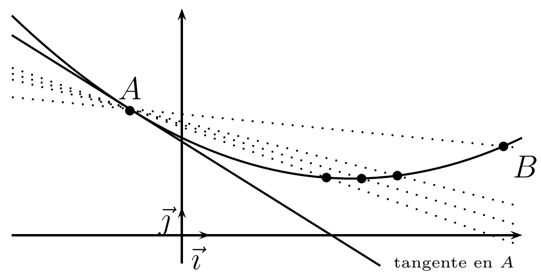
Remarques

➾ Si f est affine, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a\,x + b$, le taux de variation est le coefficient a donc f est dérivable en tout x et $f'(x) = a$.
➾ Si l'on considère que $f(x) = y$ alors le nombre dérivé de f en a s'écrit aussi $f'(a) = \dfrac{dy}{dx}(a)$ (notation de Leibniz).
En sciences physiques, on travaille souvent avec des fonctions dépendant du temps, ainsi si $q = f(t)$ alors le nombre dérivé de q en a s'écrit $q'(a) = \dfrac{dq}{dt}(a)$.

2) Tangente à la courbe d'une fonction en un point

Définition

Considérons les sécantes passant par un point $A\,(a\,;\,f(a))$ et notons $B\,(a+h\,;\,f(a+h))$ un autre point de la courbe.
Alors, quand h se rapproche de 0, le point B s'approche de A et les sécantes peuvent se rapprocher d'une droite appelée tangente à la courbe en A.



Exemple 5

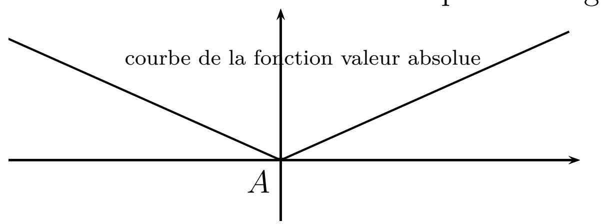
Reprenons une partie du tableau de l'exemple 5 :

h	1	0,5	0,1	0,01	0,001
$f(3+h) - f(3)$	16	6,125	0,961	0,09	0,009

Apparemment, $f(3+h) - f(3) \simeq 9\,h$ donc $f(3+h) \simeq 1 + 9\,h$.
Ceci donne une approximation linéaire de la fonction f au voisinage de 3 : $f(x) = f(3+h) \simeq 1 + 9h = 1 + 9(x-3) \simeq 9\,x - 26$.
La tangente à la courbe de f en son point d'abscisse 3 aurait donc pour équation $y = 9\,x - 26$.

Exemple 4

La courbe de la fonction valeur absolue n'a pas de tangente en O :



3) Dérivabilité et tangente

Propriété 1

Si f est dérivable en a alors la courbe représentative de f admet une tangente en son point d'abscisse a.

Exemple 3

La fonction carré est dérivable en 1 donc sa courbe a une tangente en son point d'abscisse 1.

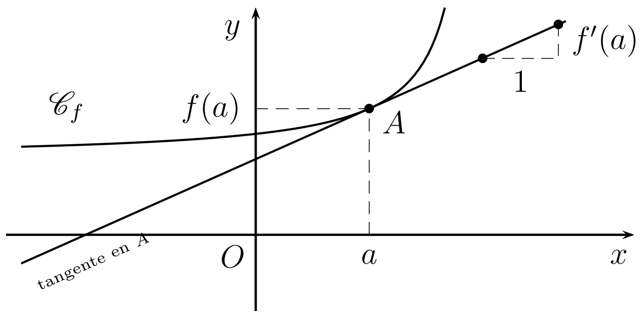
Remarque

La réciproque de la propriété 1 est fausse : la courbe de la fonction racine carrée a une tangente en $A\ (0\,;\,0)$ mais la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 car cette tangente n'a pas de coefficient directeur (elle est « verticale »).

4) Coefficient directeur d'une tangente

Propriété 2

Si f est dérivable en a alors le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f en son point d'abscisse a est $f'(a)$.

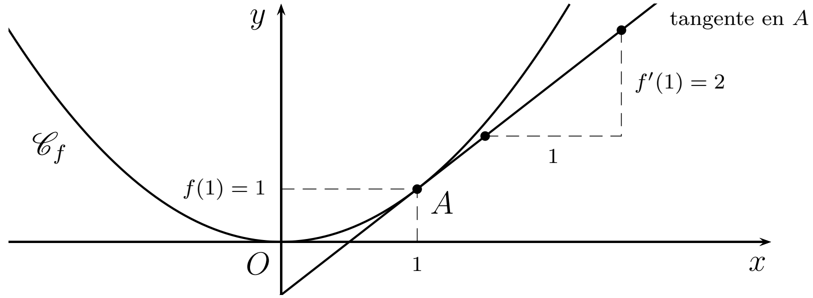


Remarque

Ne confondez pas $f(a)$ (ordonnée du point A) et $f'(a)$ (coefficient directeur de la tangente en A) !

Exemple 3

La fonction carré est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$.
La tangente à sa courbe en son point d'abscisse 1 a donc pour coefficient directeur 2.



Remarquez que $f(1) = 1$ n'est pas égal à $f'(1) = 2$.

5) Équation d'une tangente

Exemple 3

Calculons l'équation réduite de la tangente tracée précédemment.
Son coefficient directeur est $f'(1) = 2$ donc son équation réduite s'écrit $y = 2\,x + p$.
Elle passe par $A\ (1\,;\,1)$ donc $1 = 2 \times 1 + p$ d'où $p = -1$.
L'équation réduite de la tangente à la courbe de la fonction carré en son point d'abscisse 1 est donc $y = 2\,x - 1$.

Propriété 3

Si f est dérivable en a alors la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a a pour équation $\boxed{y = f(a) + f'(a)(x - a)}$.

Démonstration « remarquable »

Si f est dérivable en a alors la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a a pour coefficient directeur $f'(a)$ donc son équation réduite s'écrit $y = f'(a)\,x + p$.
Elle passe par $A\ (a\,;\,f(a))$ donc $f(a) = f'(a) \times a + p$ d'où $p = f(a) - a\,f'(a)$.
L'équation réduite de cette tangente est donc :
$y = f'(a)\,x + f(a) - a\,f'(a) = f(a) + f'(a)(x - a)$.

Exemple 3

Retrouvons plus rapidement l'équation réduite précédente :
$y = f(1) + f'(1)(x-1) = 1 + 2(x-1) = 2\,x - 1$.

III. Fonction dérivée

1) Principe

Définition

On dit que f est dérivable sur un intervalle I si f est dérivable en tout réel a de I. La fonction qui associe à tout a de I le nombre dérivé $f'(a)$ est appelée (fonction) dérivée de f et notée f'.

Exemple 6

La fonction dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4$ est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 0$.
En effet, la fonction étant constante, son taux de variation est nul donc la fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est la fonction nulle (tangente horizontale).

Exemple 7

La fonction dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$ est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 1$ (cf. remarque faite dans le II.1)).

Remarque

Nous écrirons plus rapidement $(x)' = 1$ mais gardez à l'esprit que nous dérivons bien une fonction et pas un nombre !
Appliqué à un nombre, cela donne des absurdités : par exemple, à partir de l'égalité $x = 4$ on obtiendrait $1 = 0$!

2) Fonctions dérivées de quelques fonctions usuelles

Démonstration « remarquable »

Soit f la fonction carré, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
Alors, pour tout a,

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h}\\ &= \frac{2ah+h^2}{h} = 2a+h.\end{aligned}$$

Quand h tend vers 0, $2a + h$ tend vers $2a$ donc la fonction carré est dérivable en tout réel a et sa fonction dérivée est définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 2\,x$.

Démonstration « remarquable »

Soit f la fonction inverse, définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
Alors, pour tout réel a non nul,

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{a}{(a+h)a}-\frac{a+h}{a(a+h)}}{h}\\ &= \frac{\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h} = \frac{-h}{a(a+h)}\times\frac{1}{h}\\ &= -\frac{1}{a(a+h)}.\end{aligned}$$

Quand h tend vers 0, $-\dfrac{1}{a(a+h)}$ tend vers $-\dfrac{1}{a^2}$ donc la fonction inverse est dérivable en tout réel $a \neq 0$ et sa fonction dérivée est définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

Propriété 4

Si $f(x) = \ldots$	alors $f'(x) = \ldots$	quand $x \in \ldots$
k (constante)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^2	$2\,x$	$\mathbb{R}$
x^3	$3\,x^2$	$\mathbb{R}$
x^n $(n \in \mathbb{N})$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$

Exemple 8

La fonction dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^7$ est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 7\,x^6$.

3) Dérivées de ku et de $u+v$

Définitions

➭ Soient u une fonction définie sur I et k une constante. Nous notons $k\,u$ la fonction définie sur I par $(k\,u)(x) = k \times u(x)$.
➭ Soient u une fonction définie sur I et v une fonction définie sur J. Soit $u+v$ la fonction définie sur $I \cap J$ par $(u+v)(x) = u(x)+v(x)$ (remarque : il n'y a pas de distribution ici car il n'y a pas de multiplication).

Exemples 9

Soit u la fonction définie sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$ par $u(x) = \sqrt{x}$. Alors la fonction $3\,u$ est définie sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$ par $3\,u(x) = 3\sqrt{x}$.
Soit v la fonction définie sur $]-\infty\,;\,2\,]$ par $v(x) = \sqrt{2-x}$. Alors la fonction $u+v$ est définie sur $[\,0\,;\,2\,]$ par $(u+v)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{2-x}$.

Propriété 5

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k une constante. Alors $k\,u$ et $u+v$ sont dérivables sur I et :

$$\boxed{(k.u)' = k.u'} \qquad \boxed{(u+v)' = u' + v'}$$

Remarques

➭ Des deux formules précédentes, il en vient une troisième : $\boxed{(u-v)' = u' - v'}$.
➭ D'autres formules viendront dans un prochain chapitre…

Exemples 10

Calculer les fonctions dérivées des fonctions définies sur un certain intervalle par :

$$f(x) = 5\,x^3\,;\ \ g(x) = x^2 + x^5\,;\ \ h(x) = 4 - 3\,x^4\,;\ \ i(x) = \frac{2}{x} - \sqrt{x}.$$

Réponses :
$f(x) = 5\,x^3$ est de la forme ku où $k = 5$ et $u = x^3$ donc $f'(x) = ku' = 5 \times 3\,x^2 = 15\,x^2$.

$g(x) = x^2 + x^5$ est de la forme $u+v$ où $u = x^2$ et $v = x^5$ donc $g'(x) = u' + v' = 2\,x + 5\,x^4$.

$h(x) = 4 - 3\,x^4$ est de la forme $u + kv$ où $u = 4$, $k = -3$ et $v = x^4$ donc $h'(x) = 0 - 3 \times 4\,x^3 = -12\,x^3$.

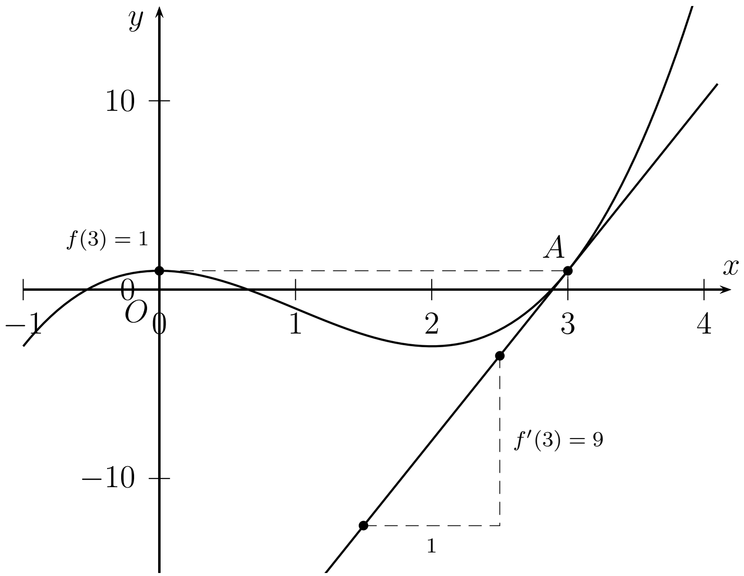
$i(x) = \dfrac{2}{x} - \sqrt{x} = 2 \times \dfrac{1}{x} - \sqrt{x}$ donc

$$\begin{aligned} i'(x) &= 2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{2}{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{4}{2\,x^2} - \frac{x\sqrt{x}}{2\,x^2} \\ &= \frac{-\,4 - x\sqrt{x}}{2\,x^2}. \end{aligned}$$

Exemple 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3\,x^2 + 1$.
Construire la tangente à la courbe de f en son point d'abscisse 3.
Déterminer l'équation réduite de cette tangente.

Réponse : pour tout réel x, nous avons $f'(x) = 3\,x^2 - 3(2\,x)$ donc $f'(3) = 3 \times 3^2 - 3 \times (2 \times 3) = 9$ (valeur conjecturée plus tôt dans le II.1) avec un tableau de valeurs).
La connaissance de $f(3) = 1$ et de $f'(3) = 9$ suffit pour tracer la tangente :



L'équation réduite de la tangente est :
$y = f(3) + f'(3)(x-3) = 1 + 9(x-3) = 9\,x - 26$.
(équation conjecturée à la fin du II.2))

Bonus : démonstration de la dérivée de la fonction racine carrée.

Démonstration

Soit f la fonction racine carré, définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
Alors, pour tout a,

$$\begin{aligned}
\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} \\
&= \frac{(\sqrt{a+h}-\sqrt{a})(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} \\
&= \frac{(\sqrt{a+h})^2-(\sqrt{a})^2}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} = \frac{a+h-a}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} \\
&= \frac{h}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}.
\end{aligned}$$

Quand h tend vers 0, $\dfrac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$ tend vers $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ donc la fonction racine carrée est dérivable en tout réel $a > 0$ et sa fonction dérivée est définie sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ par $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.