

**CONCOURS ESGT TS-TS' 2009**  
**EPREUVE DE MATHÉMATIQUES**

Durée : 3 heures – Coefficient : 2

Documents interdits.

Calculatrice fournie par l'ESGT uniquement.

Les sept exercices sont indépendants.

**Exercice I**

Fournir les caractéristiques ainsi que l'équation réduite de la conique suivante :

$$x^2 = \frac{25}{2} \left[ y - \frac{6}{10} \right]^2 + 1$$

**Exercice II**

Soit le nombre complexe  $Z$  défini par :

$$Z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} \text{ avec } i \text{ tel que } i^2 = -1.$$

2.1/ Déterminer le module et l'argument du nombre complexe  $Z$ .

2.2/ Déterminer l'ensemble  $E$  formé des entiers positifs non nuls  $n$  tels que  $Z^n$  soit réel.

2.3/ Calculer  $Z^k$  pour la plus petite des valeurs  $k$  de l'ensemble  $E$ .

**Exercice III**

Dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les trois points  $A, B$  et  $C$  placés sur les trois axes de coordonnées :  $A(1, 0, 0), B(0, 2, 0), C(0, 0, 3)$ .

3.1/ Déterminer les coordonnées d'un vecteur unitaire  $\vec{n}$  perpendiculaire au plan  $ABC$ .

3.2/ Calculer l'aire du triangle  $ABC$  en utilisant le produit vectoriel.

3.3/ Quel est le volume du parallélépipède construit sur  $AO, AB, AC$  ?

**Exercice IV**

On fournit l'inégalité de Schwartz suivante :

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur un intervalle fermé borné  $[a; b], b \geq a$ .

$$\text{Alors : } \left[ \int_a^b f(x)g(x)dx \right]^2 \leq \left( \int_a^b (f(x))^2 dx \right) \left( \int_a^b (g(x))^2 dx \right)$$

Vérifier l'inégalité de Schwartz sur l'intégrale suivante :  $\int_0^1 \exp(-x)dx$ .

(Note : comprendre « quand  $f(x) = g(x) = \exp(-x)$  »)

### Exercice V

Cet exercice porte sur l'étude de l'évolution de la masse d'un organisme au cours du temps.

5.1/ Étudier les variations de la fonction numérique de la variable réelle positive  $t$  :

$$h : t \rightarrow \frac{3}{1 + 2\exp(-2t)}.$$

5.2/ Tracer la courbe représentative (C) dans un repère orthonormé.

5.3/ Déterminer le temps nécessaire pour que la masse initiale double.

### Exercice VI

Combien faut-il de lancers, au minimum, d'une pièce équilibrée afin que la probabilité d'avoir 0 « pile » soit majorée par 2 % ?

### Exercice VII

Soit la fonction de la variable réelle  $x$  définie par :

$$s : x \rightarrow \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}.$$

7.1/ Fournir  $s'(0)$  en utilisant le développement limité de  $s$  à l'ordre 2.

7.2/ Retrouver directement cette valeur.