CONCOURS ESGT 2005
EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Les 6 exercices sont indépendants.

Exercice I

Fournir deux valeurs remarquables solutions de l'équation trigonométrique suivante :

$$6\sin^3 x - 7\sin^2 x + 1 = 0.$$

Exercice II

Déterminer algébriquement l'ensemble des points M d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ (x, y réels) de telle manière que le complexe $Z = \dfrac{z+1}{z-2\mathrm{i}}$ soit imaginaire pur.

Exercice III

Soit les deux épreuves suivantes :

3.1) On procède au jet d'un dé non truqué et on note X la variable aléatoire correspondant à la face obtenue.

Fournir l'espérance mathématique notée m, la variance notée V et enfin l'écart-type noté σ de la variable aléatoire X.

3.2) On jette 2 dés non truqués simultanément en notant Y la variable aléatoire correspondant à la somme des faces obtenues.

Calculer l'espérance mathématique de Y et commenter le résultat obtenu.

Exercice IV

Déterminer la nature et les éléments de symétrie des coniques d'équations suivantes :

4.1) $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 12 = 0$

4.2) $y^2 + 6y + x + 4 = 0$

Exercice V

On considère la suite (u_n), n entier naturel, définie par :

$$u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n} \text{ et } u_0 = 0.$$

5.1) Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

5.2) Montrer que la suite (u_n) est majorée par 3.

5.3) Montrer l'inégalité suivante : $3 - u_{n+1} \leqslant \dfrac{3 - u_n}{3}$.

5.4) En déduire l'encadrement : $0 \leqslant 3 - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{3^n}$.

Que peut-on en conclure lorsque $n \to +\infty$?

Exercice VI

Dans tout l'exercice suivant k est un paramètre entier naturel supérieur ou égal à 2.

6.1) Fournir une primitive de la fonction $g_k : t \mapsto g_k(t) = t^k \ln t$.

6.2) Étudier et tracer dans un repère orthonormé la fonction :

$$g_2(t) = t^2 \ln t$$

(On fournira les coordonnées du point d'inflexion B_2).

6.3) Étudier les variations de $g_k(t)$ et fournir les coordonnées du minimum A_k.