

CONCOURS ESGT 2000
EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures – Coefficient : 1

L'utilisation de la calculatrice est interdite.

Exercice I

On pose $I_{p,n} = \int_0^1 x^p(1-x)^n dx$, p et n désignent des entiers naturels.

1°) Calculer $I_{p,0}$, $I_{p,1}$ et $I_{p,2}$.

2°) Calculer $I_{0,n}$ et en déduire $I_{1,n}$.

3°) Établir pour $n \geq 1$ la relation $I_{p,n} = \frac{n}{p+1} I_{p+1,n-1}$ puis en déduire $I_{p,n}$.

4°) Application : calculer $I_{5,4}$.

Exercice II

1°) Linéariser, à l'aide des formules d'Euler, $\cos x \cdot \sin^3 x$.

2°) Résoudre l'équation trigonométrique suivante : $8 \cos x \cdot \sin^3 x = 2 - \sin 4x$.

Exercice III

Étudier et construire la courbe paramétrée suivante :

$$\begin{cases} x(t) = t(t+1) \\ y(t) = 1+t^3 \end{cases}$$

Exercice IV

Discuter et positionner suivant les valeurs des paramètres réels a et m les solutions de l'équation suivante :

$$\ln(x+a) - \frac{1}{2} \ln(ax) = \ln\left(\frac{1+m^2}{m}\right)$$

Exercice V

On dispose de 2 dés A et B.

Le **dé A** a 4 faces rouges et 2 blanches.

Le **dé B** a 2 faces rouges et 4 blanches.

On lance une pièce de monnaie une fois pour toute en début de jeu.

Si on obtient « pile », on joue avec le dé A. Si on obtient « face », on joue avec le dé B.

- 1°) Calculer la probabilité d'obtenir « rouge » au premier lancer de dé.
- 2°) Calculer la probabilité d'obtenir « rouge » au 3^{ème} lancer sachant que l'on a déjà obtenu « rouge » aux 2 premiers lancers.
- 3°) Quelle est la probabilité P' d'avoir utilisé le dé A sachant que l'on a obtenu « rouge » aux n premiers lancers ? (que vaut P' quand $n \rightarrow +\infty$?)
- 4°) Combien de fois faut-il avoir obtenu « rouge » pour être assuré, à 90 % de chances, d'avoir utilisé le dé A ?

Exercice VI

Caractériser l'ensemble des vecteurs orthogonaux aux vecteurs :

$$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$