EXERCICE 1 *(8 points)*

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm. On considère la courbe $\mathscr{C}$ définie par son équation polaire :

$$r = f(\theta) = 2\cos\theta - \cos^2\theta \quad (\theta \in \mathbb{R}).$$

1°) Montrer que l'on peut restreindre l'étude des variations de la fonction f à l'intervalle $[\,0\ ;\ \pi\,]$.

2°) Étudier les variations de la fonction f sur $[\,0\ ;\ \pi\,]$ et dresser son tableau de variations.

3°) On note A, B, C, D et E les points de la courbe $\mathscr{C}$ correspondant aux valeurs suivantes de θ : 0, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{4}$ et π.
Recopier et compléter le tableau suivant (en indiquant les valeurs exactes) :

Point	***A***	***B***	***C***	***D***	***E***
θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$r = f(\theta)$					
$r' = f'(\theta)$					

Donner un vecteur directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ aux points A, C et E.

4°) Représenter les cinq points A, B, C, D et E avec leurs tangentes respectives puis tracer la courbe $\mathscr{C}$.

EXERCICE 2 *(12 points)*

PARTIE A : ÉTUDE D'UNE INVERSION

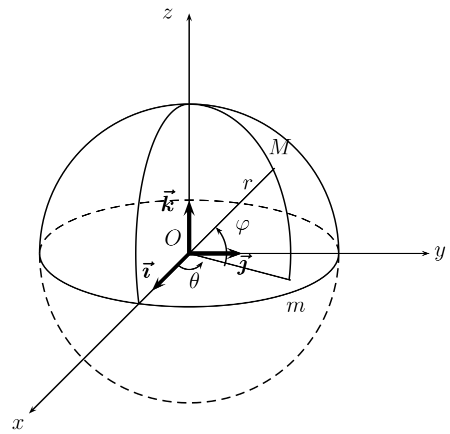
On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$ et on considère l'inversion I de pôle $\Omega\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\,;\,\frac{3}{\sqrt{2}}\,;\,0\right)$ et de puissance 3. L'unité de longueur est le cm.

1°) Donner une équation cartésienne de la sphère $\mathscr{S}$ de centre O et de rayon 3.

2°) Déterminer la nature de l'image $\mathscr{P}$ de la sphère $\mathscr{S}$ par l'inversion I.

3°) Donner une équation cartésienne de $\mathscr{P}$.

PARTIE B : TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE



On rappelle que les coordonnées sphériques d'un point M appartenant à la sphère de rayon r et n'appartenant pas à l'axe $(O, \vec{k})$ sont données sous la forme d'un triplet (r, θ, φ) où :

$$r = OM \qquad \theta = (\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{Om}}) \qquad \varphi = (\widehat{\overrightarrow{Om}, \overrightarrow{OM}}).$$

On considère les points A, B, C de l'espace dont les coordonnées sphériques sont :

$$A\left(3\,;\,0\,;\,\frac{\pi}{4}\right) \qquad B\left(3\,;\,\frac{\pi}{2}\,;\,0\right) \qquad C\,(3\,;\,0\,;\,0)$$

1°) Déterminer les caractéristiques du triangle sphérique ABC.

2°) Calculer l'aire du triangle sphérique ABC.

3°) Déterminer les coordonnées cartésiennes de A, B et C.

4°) On note A', B' et C' les images respectives des points de A, B et C par l'inversion I.

a) Calculer les coordonnées cartésiennes de A'.

b) On donne $x_{B'} = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$ et $y_{B'} = \frac{1+3\sqrt{2}}{2}$

$x_{C'} = \frac{1+3\sqrt{2}}{2}$ et $y_{C'} = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$.

Indiquer les cotes des points B' et C' en justifiant la réponse.

5°) Représenter graphiquement la sphère $\mathscr{S}$ et les points A, B, C, Ω, A', B' et C'.