

**BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR**

**GÉOMÈTRE/TOPOGRAPHE**

**SESSION 2005**

**MATHÉMATIQUES**

**Durée : 2 h**

**Coefficient : 2**

---

**- SUJET -**

Le sujet comporte deux exercices indépendants  
qui seront traités sur des copies séparées.

Dès remise du sujet, assurez-vous qu'il est complet.

Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction.

L'usage de la calculatrice est autorisé.

### EXERCICE 1 (8 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique 2 cm. On considère la courbe  $\mathcal{C}$  définie par son équation polaire :

$$r = f(\theta) = 2 \cos \theta - \cos^2 \theta \quad (\theta \in \mathbb{R}).$$

1°) Montrer que l'on peut restreindre l'étude des variations de la fonction  $f$  à l'intervalle  $[0 ; \pi]$ .

2°) Étudier les variations de la fonction  $f$  sur  $[0 ; \pi]$  et dresser son tableau de variations.

3°) On note  $A, B, C, D$  et  $E$  les points de la courbe  $\mathcal{C}$  correspondant aux valeurs suivantes de  $\theta$  :  $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$  et  $\pi$ .

Recopier et compléter le tableau suivant (en indiquant les valeurs exactes) :

Point	A	B	C	D	E
$\theta$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\pi$
$r = f(\theta)$					
$r' = f'(\theta)$					

Donner un vecteur directeur de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  aux points  $A, C$  et  $E$ .

4°) Représenter les cinq points  $A, B, C, D$  et  $E$  avec leurs tangentes respectives puis tracer la courbe  $\mathcal{C}$ .

### EXERCICE 2 (12 points)

#### **PARTIE A : ÉTUDE D'UNE INVERSION**

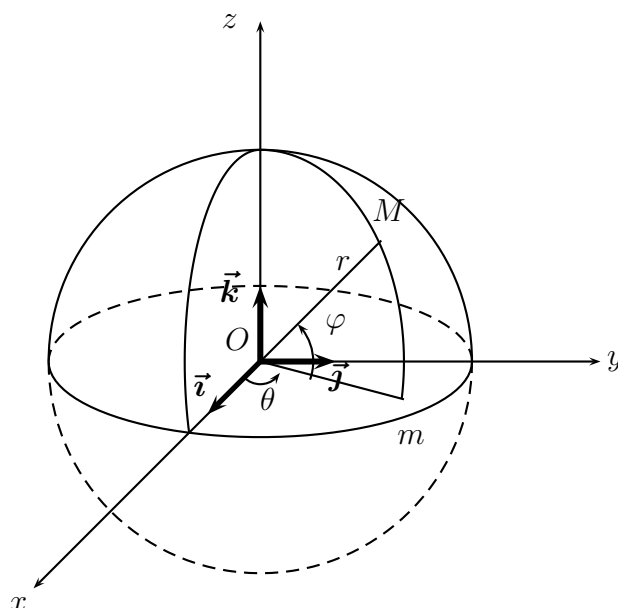
On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et on considère l'inversion  $I$  de pôle  $\Omega \left( \frac{3}{\sqrt{2}} ; \frac{3}{\sqrt{2}} ; 0 \right)$  et de puissance 3. L'unité de longueur est le cm.

1°) Donner une équation cartésienne de la sphère  $\mathcal{S}$  de centre  $O$  et de rayon 3.

2°) Déterminer la nature de l'image  $\mathcal{P}$  de la sphère  $\mathcal{S}$  par l'inversion  $I$ .

3°) Donner une équation cartésienne de  $\mathcal{P}$ .

## PARTIE B : TRIGONOMETRIE SPHÉRIQUE



On rappelle que les coordonnées sphériques d'un point  $M$  appartenant à la sphère de rayon  $r$  et n'appartenant pas à l'axe  $(O, \vec{k})$  sont données sous la forme d'un triplet  $(r, \theta, \varphi)$  où :

$$r = OM \quad \theta = (\vec{i}, \widehat{Om}) \quad \varphi = (\widehat{Om}, \widehat{OM}).$$

On considère les points  $A, B, C$  de l'espace dont les coordonnées sphériques sont :

$$A \left( 3; 0; \frac{\pi}{4} \right) \quad B \left( 3; \frac{\pi}{2}; 0 \right) \quad C (3; 0; 0)$$

- 1°) Déterminer les caractéristiques du triangle sphérique  $ABC$ .
- 2°) Calculer l'aire du triangle sphérique  $ABC$ .
- 3°) Déterminer les coordonnées cartésiennes de  $A, B$  et  $C$ .
- 4°) On note  $A', B'$  et  $C'$  les images respectives des points de  $A, B$  et  $C$  par l'inversion  $I$ .
  - a) Calculer les coordonnées cartésiennes de  $A'$ .
  - b) On donne  $x_{B'} = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$  et  $y_{B'} = \frac{1 + 3\sqrt{2}}{2}$   
 $x_{C'} = \frac{1 + 3\sqrt{2}}{2}$  et  $y_{C'} = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$ .  
 Indiquer les cotes des points  $B'$  et  $C'$  en justifiant la réponse.
- 5°) Représenter graphiquement la sphère  $\mathcal{S}$  et les points  $A, B, C, \Omega, A', B'$  et  $C'$ .