

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

GÉOMÈTRE/TOPOGRAPHE

SESSION 2004

MATHÉMATIQUES

Durée : 2 h

Coefficient : 2

- SUJET -

Le sujet comporte deux exercices indépendants
qui seront traités sur des copies séparées.

L'annexe est à rendre avec la copie.

Dès remise du sujet, assurez-vous qu'il est complet.

Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction.

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice I (10 points)

Le but de cet exercice est l'étude d'une courbe plane, appelée lemniscate, que l'on peut rencontrer lors de l'élaboration de certains raccordements routiers.

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité 5 cm). On note C la courbe définie en coordonnées polaires par :

$$r = f(\theta) = \sqrt{\sin(2\theta)} \quad \text{pour} \quad \theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right].$$

1°) Soit θ un réel de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

a) A quel intervalle $\theta + \pi$ appartient-il ?

b) Calculer $f(\theta + \pi)$ en fonction de $f(\theta)$; en déduire une propriété de symétrie de la courbe C .

2°) Soit θ un réel de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

a) A quel intervalle $\frac{\pi}{2} - \theta$ appartient-il ?

b) Calculer $f\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ en fonction de $f(\theta)$; en déduire une propriété de symétrie de la courbe C .

3°) Soit C_1 l'arc de courbe obtenu pour $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$. Comment obtient-on C à partir de C_1 ?

4°) Montrer que pour tout θ appartenant à $\left]0; \frac{\pi}{4}\right]$, $r' = f'(\theta) = \frac{\cos 2\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}}$.

5°) Étudier le signe de $f'(\theta)$ sur $\left]0; \frac{\pi}{4}\right]$. En déduire les variations de f pour $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, puis dresser le tableau de variations de f sur ce dernier intervalle.

6°) On pose, pour tout $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{4}\right]$, $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$. Montrer que :

$$x' = \frac{\cos 3\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}} \quad \text{et} \quad y' = \frac{\sin 3\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}}.$$

7°) Déterminer un vecteur directeur de chacune des deux tangentes suivantes à la courbe C , l'une au point A de paramètre $\theta = \frac{\pi}{6}$ et l'autre au point B de paramètre $\theta = \frac{\pi}{4}$.

8°) Calculer $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{y'}{x'}$. On admet que cette limite est le coefficient directeur de la tangente à C au point O . Caractériser la tangente à C au point O .

9°) Tracer soigneusement la courbe C , ainsi que les tangentes aux points O , A , B .

10°) On admet que le rayon de courbure au point B vaut $\frac{1}{3}$. Déterminer un vecteur directeur \vec{n} de la normale au point B . Sur la même figure, construire le cercle de courbure en B .

Exercice II (10 points)

L'espace est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les axes de coordonnées sont les axes (Ox) , (Oy) et (Oz) . Les plans de coordonnées sont les plans (Oxy) , (Oxz) et (Oyz) . La notation $M(x, y, z)$ désigne le point M de coordonnées x , y et z .

La figure sera construite et complétée sur l'annexe au fur et à mesure de l'avancement des questions.

Soit Δ la droite incluse dans le plan (Oyz) , d'équations
$$\begin{cases} x = 0 \\ 12y - 5z = 0 \end{cases}$$

Soit Σ la sphère de centre $\Omega(0, 3, 2)$, tangente en $T(0, 3, 0)$ au plan (Oxy) .

1°) a) Montrer que la sphère Σ a pour équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 6y - 4z + 9 = 0$.

b) Montrer que la droite Δ et la sphère Σ ont pour unique point commun $A\left(0, \frac{15}{13}, \frac{36}{13}\right)$.
En déduire la position de la droite Δ par rapport à la sphère Σ .

2°) Soit (P) le plan perpendiculaire au point A à la droite Δ .

a) Montrer que (P) a pour équation $5y + 12z - 39 = 0$.

b) On note $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ les droites intersections respectives de (P) avec les plans (Oyz) , (Oxz) et (Oxy) . Déduire de la question a) un système d'équations cartésiennes de chacune des droites $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$.

c) Compléter la figure donnée en annexe. En particulier, on reconnaîtra et on nommera les droites $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$.

3°) Soit B le point de la sphère Σ , diamétralement opposé à T .

On note T' le point de coordonnées $(3, 0, 0)$

a) Déterminer les coordonnées de B et placer ce point sur la figure en annexe.

b) Écrire une équation du plan (P') déterminé par les droites (TB) et (TT') .

c) Montrer que les plans (P) et (P') sont sécants suivant une droite (D) d'équations

$$\text{paramétriques : } \begin{cases} x = 12t \\ y = -12t + 3 \\ z = 5t + 2. \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

d) Déterminer les coordonnées du point I , intersection de (D) avec le plan (Oxz) .

4°) Soit Γ_1 le grand cercle intersection du plan (P) et de la sphère Σ . Soit Γ_2 le grand cercle intersection du plan (P') et de la sphère Σ . Les deux grands cercles Γ_1 et Γ_2 se coupent en deux points. On note C le point d'abscisse positive. On obtient ainsi un triangle sphérique ABC tracé sur la sphère Σ .

a) Compléter la figure donnée en annexe ; reconnaître et nommer Γ_1 et Γ_2 .

Avec les notations habituelles, on rappelle les « formules fondamentales » :

$$\begin{cases} \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \hat{A} \\ \cos \hat{A} = -\cos \hat{B} \cos \hat{C} + \sin \hat{B} \sin \hat{C} \cos a \end{cases}$$

b) Montrer que le triangle sphérique ABC est rectangle en A . Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{\Omega B}$. En déduire une valeur approchée de la mesure en degrés de l'angle géométrique $\widehat{A\Omega B}$.

c) Nommer deux plans de la figure déterminant l'angle \hat{B} du triangle sphérique ABC .

d) En déduire que sa mesure est 45° . Calculer des valeurs approchées de \hat{C} , b , a .

Figure de l'exercice 2

