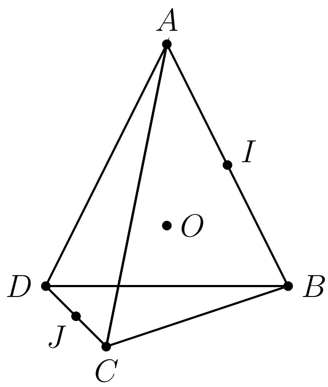
BTS Géomètre Topographe - Session 1997

EXERCICE I (5 points)

La molécule de méthane est composée d'un atome de carbone et de quatre atomes d'hydrogène. Les quatre atomes d'hydrogène occupent les sommets d'un tétraèdre régulier $ABCD$; l'atome de carbone est au centre O de ce tétraèdre.

On se propose de mesurer de deux façons l'angle formé par deux liaisons carbone-hydrogène (par exemple l'angle $\widehat{BOC}$).



1ère méthode : I est le milieu du segment $[AB]$

J est le milieu du segment $[CD]$

1°) Justifier brièvement que O est le milieu de $[IJ]$.

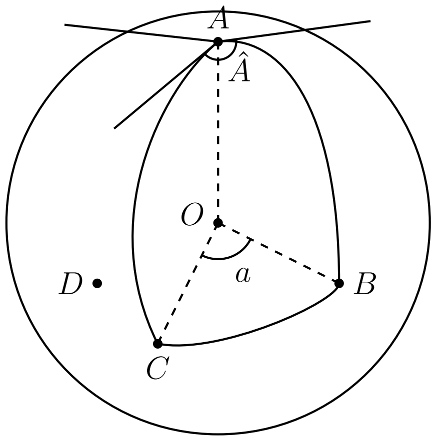
2°) On note u la longueur commune des quatre côtés du tétraèdre. $u = AB$. Exprimer, en fonction de u, les longueurs AI, AJ, IJ, OI, des segments $[AI]$, $[AJ]$, $[IJ]$, $[OI]$.

3°) On prend $OA = 1$, c'est-à-dire le rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$, comme unité de longueur. Calculer u.

4°) Calculer une ligne trigonométrique (sinus, cosinus ou tangente) de l'angle $\widehat{AOI}$ puis en déduire une valeur approchée, à $0,01°$ près, de la mesure en degré décimal de $\widehat{AOB}$.

2ème méthode :

À partir des quatre sommets du tétraèdre régulier, on peut découper la sphère de centre O et de rayon $OA = 1$, en quatre triangles sphèriques équilatéraux.



1°) Calculer l'aire d'un des quatre triangles sphèriques équilatéraux, tel que ABC. Calculer la mesure $\hat{A}$ en radians d'un angle de ce triangle sphèrique.

2°) De la formule classique, dans un triangle sphèrique, avec les notations habituelles, $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \hat{A}$, déduire $\cos a$ et retrouver la mesure de $\widehat{AOB}$ en degré décimal.

EXERCICE II (7 points)

Dans le plan rapporté au repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath})$, on désigne par $\mathscr{C}$ la courbe définie paramétriquement par $\begin{cases} x = f(t) = t\sqrt{1-t^2} \\ y = g(t) = (1+t^2)\sqrt{1-t^2} \end{cases}$

1°) Montrer que $\mathscr{C}$ admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

2°) Dresser le tableau des variations de f et de g pour $t \in [-1\ ;\ 1]$.

3°) Calculer $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{f(t)}{g(t)}$ et en déduire le coefficient directeur de la tangente à $(\mathscr{C})$ en l'origine O.

4°) Tracer la courbe $\mathscr{C}$. (On prendra $||\vec{\imath}|| = |||\vec{\jmath}|| = 10$ cm).

5°) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$.
Nota bene : L'aire de la partie du plan limitée par cette boucle est donnée par :
$\mathscr{A} = \displaystyle\int_{-1}^{1} g(t)f'(t)\,\mathrm{d}t$, en unités d'aire.

EXERCICE III (8 points)

A, R et C sont trois points non alignés du plan. P désigne un point variable du secteur angulaire $\widehat{ARC}$ tel que les cercles Γ et Γ' de centres O et O', circonscrits aux triangles ARP et CRP, soient différents. *(voir le schéma sur la feuille-réponse pour tracer les éléments géométriques des parties A et B du problème).*

A - UTILISATION D'UNE INVERSION (3 points)

Soit I l'inversion de pôle R et de puissance $k = RA.RC$, où RA et RC sont les longueurs des segments.

1°) Montrer que le point $A' = I(A)$ vérifie : $RA' = RC$. Sur le schéma, placer A' et $C' = I(C)$.

2°) Préciser la nature des ensembles $E = I(\Gamma)$ et $E' = I(\Gamma')$. Tracer avec précision E et E'.

3°) Prouver que les ensembles E et E' ont un point commun unique, qu'on notera M.

B - EQUATIONS CARTESIENNES (4 points)

Afin de faciliter les calculs, on choisit un repère orthonormal $(R; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ d'origine R et tel que A soit sur l'axe des abscisses (*voir le schéma*). Dans ce repère, les points A et C (fixes) et P (variable), ont pour coordonnées : $A\ (-2\,;\ 0)$, $B\ (3\,;\ 4)$ et $P\ (a\,;\ b)$ avec $ab \neq 0$.

1°) Calculer les coordonnées de A' et de C'.

2°) On considère les angles géométriques (non orientés) $\alpha = \widehat{APR}$ et $\gamma = \widehat{CPR}$.

a) Quelle est l'image par l'inversion I du point P ? Montrer que $\widehat{AA'M} = \alpha$.

b) Exprimer, en fonction de α, le coefficient directeur de la droite (MA') et en déduire une équation de cette droite.

3°) a) Vérifier que l'angle $\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{RC}\right)$ a une tangente égale à $4/3$.

b) Justifier que $\widehat{RC'M} = \gamma$. En déduire la valeur de $\tan\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{C'M}\right)$ en fonction de $\tan\gamma$, puis une équation de la droite (MC').

C - RELEVEMENT TOPOGRAPHIQUE (1 point)

Un observateur se repère par rapport à trois points géodésiques : une antenne TV A, un relais téléphonique R et un clocher C situés comme sur le schéma, les distances étant maintenant exprimées en km. Un théodolite, placé au point P, dans le secteur angulaire $\widehat{ARC}$, permet de mesurer les angles $\alpha = \widehat{APR} = 25$ gr et $\gamma = \widehat{CPR} = 70$ gr.

1°) Déduire du paragraphe B les coordonnées du point M à 1 m près.

2°) Calculer, à 1 m près, les coordonnées du point d'observation P.

FEUILLE REPONSE de l'exercice III A RENDRE AVEC LA COPIE