Exercice I (6 points)

On saisit un texte et on l'imprime par pages de 50 lignes de 80 caractères, c'est-à-dire avec 4000 caractères par page.

La probabilité pour chaque caractère d'être mal saisi, ce qui entraine une faute de frappe, est de 1/1000. On admet que les fautes de frappe sont indépendantes les unes des autres.

On appelle X la variable aléatoire définie par le nombre de fautes de frappe par page.

- A -

1°) a) Exprimer la valeur exacte de $P(X = 0)$.

b) En donner une valeur approchée en indiquant la façon dont la calculatrice a été employée.

2°) Indiquer la loi de probabilité classique suivie par X, ses paramètres, puis l'espérance mathématique et l'écart-type de X.

3°) Justifier brièvement qu'on peut approcher la loi de X par une loi de Poisson, de paramètre $\lambda = 4$.

- B -

Dans cette partie, on admet que X, donnant le nombre de fautes de frappe par page, suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 4$.

1°) Calculer $P(X = 0)$ et comparer ce résultat à celui du 1°) de la partie A.

2°) Si on tolère jusqu'à trois fautes de frappe par page, quel est le pourcentage de pages à rejeter ?

3°) Combien de fautes par page faut-il tolérer pour rejeter moins de 1 % des pages ?

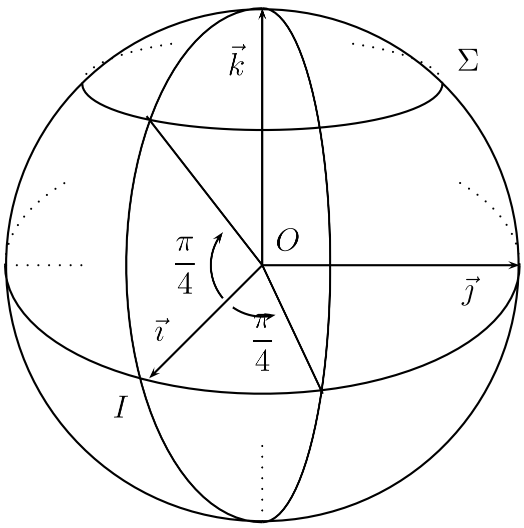
Exercice II (8 points)

On considère, dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, la sphère Σ de centre O, de rayon 1. Sur cette sphère, les points sont repérés par leur longitude θ et leur latitude φ. Si m est le projeté orthogonal de M sur le plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$,

$\theta = (\vec{\imath}, \overrightarrow{Om})$, $\varphi = (\overrightarrow{Om}, \overrightarrow{OM})$. *Les mesures des angles sont données en radians.*

Soient les points $I\ (\theta = 0,\ \varphi = 0)$ $\quad A\left(\theta = \dfrac{\pi}{4},\ \varphi = \dfrac{\pi}{4}\right)$ $\quad B\left(\theta = \dfrac{\pi}{2},\ \varphi = 0\right)$

$C\left(\theta = 0,\ \varphi = \dfrac{\pi}{2}\right)$ et $S\left(\theta = 0,\ \varphi = -\dfrac{\pi}{2}\right)$



Le schéma ci-contre n'est qu'une perspective approximative.

1°) a) Reproduire la partie utile du schéma en y plaçant les points A, B, C et S.

b) Lire sur le schéma ou calculer les mesures des côtés a, b, c du triangle sphérique ABC.

Rappel : $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \hat{A}$.

c) Déterminer les coordonnées cartésiennes de A, B et C.

2°) On considère l'inversion $\mathscr{I}$ de pôle S, de puissance 4.

a) Quelle est l'image de la sphère Σ dans l'inversion $\mathscr{I}$?

Quelle est l'image par l'inversion $\mathscr{I}$ d'un grand cercle qui passe par C ?

b) Déterminer les coordonnées des points $B' = \mathscr{I}(B)$ et $C' = \mathscr{I}(C)$.

Montrer que $A' = \mathscr{I}(A)$ a pour coordonnées $(2 - \sqrt{2}\,;\ 2 - \sqrt{2}\,;\ 1)$.

3°) On appelle Γ_1 le grand cercle qui passe par A et C et Γ'_1 son image par $\mathscr{I}$.

On appelle Γ_2 le grand cercle qui passe par B et C et Γ'_2 son image par $\mathscr{I}$.

On appelle Γ_3 le grand cercle qui passe par A et B et Γ'_3 son image par $\mathscr{I}$.

a) Préciser la nature de Γ'_1, Γ'_2, Γ'_3 et déterminer les équations de Γ'_1 et Γ'_2 dans le repère $(C,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

b) Représenter dans le plan $(C,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ les points A', B', C' et les inverses des côtés du triangle sphérique ABC.

(*Pour la construction de l'inverse du côté AB, on pourra utiliser le point D symétrique de B par rapport à O*).

Exercice III (6 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{8x - 15}{1 + x^2}$ et sa courbe représentative (Φ) dans un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm.

L'origine des axes sera placée de telle sorte que l'axe des abscisses puisse être gradué de -8 à $+8$ et l'axe des ordonnées de -20 à $+2$.

1°) a) Calculer $f'(x)$. On justifiera que $f'(x)$ est du signe de $(4x + 1)(4 - x)$.

b) Étudier les variations de f. En précisant les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, on indiquera une asymptote de (Φ).

2°) a) Reproduire, compléter et utiliser sur le graphique le tableau de valeurs ci-dessous :

x	-7	$-5,5$	-3	-2	-1	$-0,75$	$-0,5$	$-0,25$
$f(x)$								

x	0	$0,5$	$0,75$	1	2	3	$5,5$	7
$f(x)$								

b) Tracer (Φ) dans les conditions indiquées plus haut.

3°) a) Déterminer les primitives de f.

b) Un calcul approché (avec la précision de la calculatrice) amène à considérer le nombre $\alpha = 17,0025978$.

Calculer à 10^{-6} près $\displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x$.

Quelle interprétation géométrique peut-on en donner ?