ACADEMIE DE MONTPELLIER Session 1995

BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR

GEOMETRE TOPOGRAPHE

Epreuve : **MATHEMATIQUES**	Durée : 3 Heures	Coefficient : 2

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage du formulaire officiel de mathématiques et des instruments de calcul est autorisé.

- SUJET -

EXERCICE 1 (4 points)

Un traceur à rouleau dessine, sur chaque plan produit par un cabinet de géomètre, un cartouche ayant la forme d'un rectangle dont la longueur doit mesurer 10 cm. Pour tester le réglage du traceur, on prélève un échantillon aléatoire de 100 cartouches. On porte les mesures effectuées dans le tableau suivant :

Mesure	9,94	9,96	9,98	10	10,02	10,04	10,06
Effectif	13	17	19	28	16	4	3

1°/ Donner la moyenne $\bar{x}_e$ et l'écart type σ_e de cet échantillon. Le détail des calculs n'est pas demandé.

2°/ Soit X la variable aléatoire qui, à chaque cartouche, associe sa longueur. Le traceur est réglé pour une moyenne de X qui serait $m = 10$ cm avec un écart type $\sigma = 0,03$ cm.
On note $\overline{X}_{100}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de taille 100, associe la moyenne des longueurs des 100 cartouches qu'il contient. On admet que $\overline{X}_{100}$ suit la loi normale de moyenne 10 et d'écart type 0,003.

a) Déterminer le réel positif h tel que $P(10 - h \leq \overline{X}_{100} \leq 10 + h) = 0,95$.

b) On avait convenu que :
si $\bar{x}_e \in [10 - h\,;\, 10 + h]$ le traceur est bien réglé
si $\bar{x}_e \notin [10 - h\,;\, 10 + h]$ on règle à nouveau le traceur.
Au vu du résultat de la question 1°/, devra-t-on procéder à un nouveau réglage du traceur ?

EXERCICE 2 (6 points)

On considère la fonction numérique f définie pour tout x réel par $f(x) = \dfrac{3x + x^3}{1 + 3x^2}$.

(C) est la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Unités de longueur sur chaque axe : 2 cm.

- A -

1°/ Déterminer les constantes réelles a et b telles que, pour tout x, on ait $f(x) = ax + \dfrac{bx}{1 + 3x^2}$.

2°/ Étudier les variations de f.

3°/ Tracer la courbe (C) et son asymptote (D_0). On précisera la position de (C) par rapport à (D_0).

- B -

On considère la droite (D_m) d'équation $y = \dfrac{1}{3}(x + m)$ où m est une constante positive.

1°/ a) Vérifier que, pour $0 < m < \dfrac{4}{\sqrt{3}}$, (D_m) coupe (C) en deux points distincts M_1 et M_2.

b) Étudier la position de cette droite par rapport à (C) quand $m = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

2°/ a) Vérifier que les projections orthogonales P_1 et P_2 de M_1 et de M_2 sur l'axe des abscisses sont des points inverses l'un de l'autre dans une inversion de pôle O et de puissance constante que l'on précisera.

b) B est le point de coordonnées $(0\,; 1)$. Que peut-on déduire du a) quant aux cercles circonscrits aux triangles BP_1P_2 ?

PROBLEME (10 points)

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Les mesures des angles sont exprimées en radians. Étant donné un point M, on appelle m son projeté orthogonal sur le plan $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Sur la sphère (S) de centre O et de rayon 1, on repère un point M par sa longitude $\theta = (\vec{\imath}, \overrightarrow{Om})$ et sa latitude $\varphi = (\overrightarrow{Om}, \overrightarrow{OM})$.

- A -

1°/ Écrire les coordonnées cartésiennes de M de (S) en fonction de θ et de φ.

2°/ On note (P) le plan d'équation $x = z$. On appelle (Γ) l'ensemble des points de l'intersection de (S) avec (P) dont la longitude est comprise entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$. On nomme A et B les points de (Γ) correspondant aux valeurs 0 et $\dfrac{\pi}{2}$ de θ.

a) Donner les coordonnées cartésiennes de A et de B.

b) Exprimer la latitude d'un point de (Γ) en fonction de sa longitude.

c) Vérifier que les coordonnées cartésiennes (x, y, z) d'un point de longitude θ sur (Γ) sont :

$$x = \frac{\cos\theta}{\sqrt{1+\cos^2\theta}} \qquad y = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1+\cos^2\theta}} \qquad z = \frac{\cos\theta}{\sqrt{1+\cos^2\theta}}.$$

(On peut utiliser la formule $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$).

d) Préciser la nature de (Γ).

- B -

Soit (γ) la projection orthogonale de (Γ) sur le plan $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1°/ Vérifier que (γ) est une partie de la conique d'équation cartésienne $2x^2 + y^2 = 1$. Quelle est la nature de cette conique ?

2°/ Dessiner (γ) dans le plan $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. (Pour cette figure, on prendra 5 cm comme unité de longueur et on indiquera dans ce dessin les projections orthogonales de A et de B.)

- C -

On considère le point C de (S) défini par $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ et $\varphi = 0$.

Calculer, à 10^{-3} près, l'aire du triangle sphérique ABC.

Rappels : A, B, C désignant les sommets et a, b, c les côtés d'un triangle sphérique sur une sphère de rayon 1, on a les relations :

$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$

$\text{aire}(ABC) = A + B + C - \pi$.