BREVET DE TECHNICIEN

ENCADREMENT DE CHANTIER

Session 2004

MATHÉMATIQUES

Durée : 2 heures - Coefficient : 3

Les calculatrices de poche sont autorisées conformément à la circulaire n°86-228 du 28 juillet 1986.   ***Le formulaire officiel de mathématiques est autorisé.***   ***La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.***

Le sujet nécessite une feuille de papier millimétré.

EXERCICE (8 points)

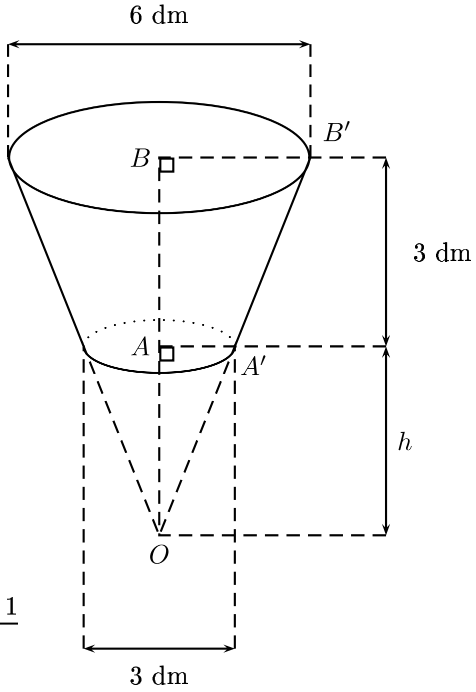

fig. 1

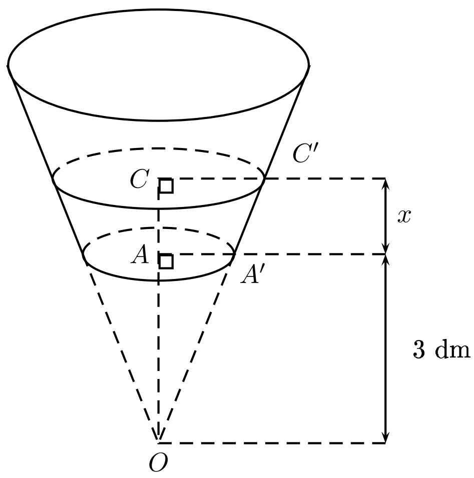

fig. 2

On considère un récipient tronconique de hauteur 3 dm, dont le diamètre d'ouverture est 6 dm et le diamètre du fond est 3 dm.

1°) Calcul du volume du récipient

Soit A le centre du fond du tronc de cône considéré et B le centre de son ouverture (fig. 1).

Un demi-plan P de frontière (AB) coupe le fond suivant un segment $[AA']$ et l'ouverture suivant un segment $[BB']$.

On désigne par 0 le point d'intersection des droites (AB) et $(A'B')$.

a) En considérant les triangles OAA' et OBB', calculer la distance OA. En déduire que la valeur exacte du volume, en dm^3, du cône de sommet O et dont la base est le fond du récipient est :

$$V_1 = \frac{9\pi}{4}.$$

b) Calculer la valeur exacte du volume, en dm^3 , du récipient. Donner la valeur arrondie à 10^{-3} près de ce volume.

2°) Graduation du récipient

On met de l'eau dans le récipient jusqu'à une certaine hauteur x exprimée en dm $(0 \leqslant x \leqslant 3)$ (fig. 2).

On appelle $V(x)$ le volume d'eau correspondant en dm^3.

Soit C le centre de la surface de l'eau. Le demi-plan P, défini précédemment, coupe la surface de l'eau suivant un segment $[CC']$.

a) Calculer, en fonction de x, la distance CC'. On vérifiera que : $CC' = \dfrac{x+3}{2}$.

b) En déduire, à l'aide du résultat obtenu en 1)a) que, pour $0 \leqslant x \leqslant 3$:

$$V(x) = \pi\left(\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x\right).$$

c) On décide de graduer le récipient de 10 litres en 10 litres. La fonction V est représentée graphiquement sur la feuille fournie en annexe (annexe à rendre avec la copie).
Déterminer, à l'aide de ce graphique, à quelles hauteurs se trouveront les graduations correspondant à 10 L, 20 L, 30 L et 40 L, en laissant sur la figure les tracés nécessaires.
Rappels :
- Volume d'un cône de rayon R et de hauteur H : $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.
- Une contenance de 1 litre correspond à un volume de 1 dm^3.

PROBLÉME (12 points)

On désigne par I l'intervalle $[1\,;+\infty[$.
Soit f la fonction numérique définie pour tout x de I par :

$$f(x) = x(-2 + \ln x).$$

On appelle C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique 1 cm).

1°) a) Résoudre dans I l'équation : $f(x) = 0$.
En déduire les coordonnées du point d'intersection A de la courbe C avec l'axe des abscisses.
b) Résoudre dans I l'inéquation : $-2 + \ln x > 0$,
En déduire le signe de $f(x)$ pour tout x de I et les positions relatives de la courbe C et de l'axe des abscisses.

2°) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3°) a) Déterminer la fonction dérivée f' de f sur l'intervalle I.
b) Résoudre dans I l'équation : $f'(x) = 0$, puis l'inéquation : $f'(x) > 0$.
c) Dresser le tableau de signes de $f'(x)$ pour tout x de I et le tableau de variation de f sur I.
On calculera la valeur exacte du minimum de f.

4°) Déterminer une équation de la tangente T au point d'abscisse 1 de la courbe C.

5°) Construire la droite T, placer le point A et construire la courbe C.

6°) Soit la fonction F définie, pour tout x de I, par :

$$F(x) = -\frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln x.$$

a) Montrer que F est une primitive de f sur I.
b) Hachurer, sur le graphique précédent, la partie D du plan délimitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.
c) Calculer la valeur exacte, en cm^2, de l'aire $\mathscr{A}$ de la partie D. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de $\mathscr{A}$.

ANNEXE A L'EXERCICE