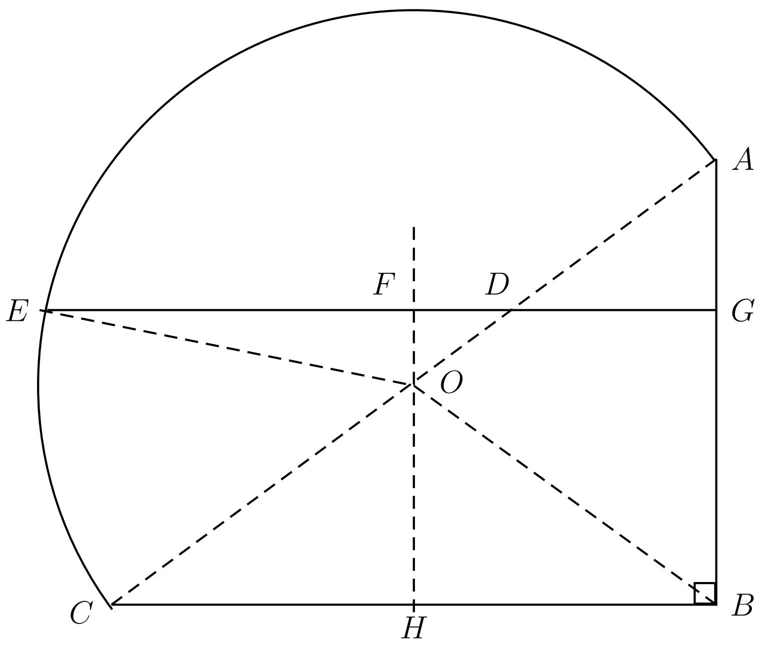
Les calculatrices de poche sont autorisées conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986. La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE : 8 points.

Dans un bâtiment d'architecture originale, on souhaite partager par une cloison une pièce en deux conformément au plan et au descriptif suivants :

Plan



Descriptif :

La pièce initiale a comme pourtour la ligne : $\boldsymbol{ABCEA}$.

Le triangle ABC est un triangle rectangle en B.

$AB = 6$ m et $BC = 8$ m.

L'arc de courbe CEA est le demi-cercle de diamètre $[AC]$ d'extrémités C et A.

O est le milieu du segment $[AC]$.

H est le milieu du segment $[BC]$.

La cloison a pour trace au sol le segment $[\boldsymbol{EG}]$.

La droite (EG) est parallèle à la droite (CB).

$AG = 2$ m.

La droite (EG) coupe la droite (OH) en F.

La droite (EG) coupe la droite (AC) en D.

1) L'objectif de cette question est de calculer la longueur de la cloison.

- **a)** Exprimer, en mètres, la longueur AC.
- **b)** Montrer que $DG = \dfrac{8}{3}$ m.
- **c)** Justifier le parallélisme des droites (OH) et (AB), en déduire que le quadrilatère $FGBH$ est un rectangle puis exprimer, en mètres, la longueur FG.
- **d)** Donner la valeur exacte, en mètres, de la longueur FD.
- **e)** En considérant les triangles FOD et DAG, calculer la longueur OF puis en déduire la valeur exacte, en mètres, de la longueur EF.
- **f)** Exprimer, en mètres, la longueur EG. On donnera la valeur arrondie au centimètre.

2) L'objectif de cette question est d'indiquer quelle est la plus grande des deux pièces obtenues après l'implantation de la cloison.

- **a)** Exprimer, en mètres carrés, l'aire de la pièce initiale.
- **b)** Exprimer, en mètres carrés, l'aire du trapèze $EGBC$.
- **c)** Indiquer quelle est, des deux pièces obtenues, celle dont l'aire est la plus grande. On justifiera la réponse.

PROBLÈME : 12 points.

On considère la fonction f, de la variable x, définie sur l'intervalle $[-1\,;\,7]$ par $f(x) = \dfrac{6x-2}{(x+2)^2}$.

Sur la page 3/3 le plan étant rapporté à un repère orthogonal $(Ox\ ,\ Oy)$ d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées, on a fait figurer :

- la courbe C représentative de la fonction f,
- un segment de la tangente T à la courbe C en son point d'abscisse 0.

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

1) Dans cette partie, on démontre certaines propriétés de la fonction f suggérées par le graphique de la page 3/3.

a) **Propriétés de f suggérées par la situation de la courbe C par rapport à l'axe des abscisses.**

i) Montrer que dans l'intervalle $[-1\,;\,7]$ l'équation, d'inconnue x, $f(x) = 0$ admet une solution et une seule dont on donnera la valeur exacte.

ii) Pour tout x de l'intervalle $[-1\,;\,7]$, déterminer le signe de $f(x)$.

b) **Propriétés de f suggérées par l'allure de la courbe C.**

i) Si f' désigne la fonction dérivée de la fonction f, prouver que,

pour tout x de l'intervalle $[-1\,;\,7]$, $f'(x) = \dfrac{-\,2(3x^2-2x-16)}{(x+2)^4} = \dfrac{-2(3x-8)}{(x+2)^3}$.

ii) Établir le tableau de variation de la fonction f.

iii) Calculer la valeur maximale prise par la fonction f sur l'intervalle $[-1\,;\,7]$. (on donnera la valeur exacte)

iv) Calculer la valeur minimale prise par la fonction f sur l'intervalle $[-1\,;\,7]$. (on donnera la valeur exacte)

c) **Propriété de f suggérée par la situation de la courbe C par rapport à la droite T.**

i) Calculer le coefficient directeur de la droite T.

ii) Donner une équation de la droite T.

iii) Pour tout x de l'intervalle $[-1\,;\,7]$, montrer que $2x - \dfrac{1}{2} - f(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{x+2}\right)^2(4x+15)$ puis en déduire que $f(x) \leq 2x - \dfrac{1}{2}$. Conclure.

2) Dans cette partie, on calcule l'aire, exprimée en centimètres carrés, du domaine D du plan limité par la courbe C, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 7$.

a) Vérifier que, pour tout x de l'intervalle $[-1\,;\,7]$, $f(x) = \dfrac{6}{x+2} - \dfrac{14}{(x+2)^2}$.

b) Déduire du résultat précédent une primitive F de f sur $[\frac{1}{3}\,;\,7]$.

c) Calculer la valeur exacte de l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{7} f(x)\,\mathrm{d}x$.

d) Exprimer, en centimètres carrés, l'aire du domaine D. On donnera la valeur exacte.

courbe *C*