Dérivation

Rappel :

Le signe de *f '* donne

les variations de *f*

A savoir absolument et sans avoir à réfléchir !

Signe d'une expression

Étude du signe d'une expression :

- soit elle est toujours positive, par exemple $x^2 + 5$;
- soit elle est toujours négative, par exemple $-2x^2 - 6$;
- soit son signe dépend de x, par exemple $3x^2 - 2x$.

Quelques cas où le signe dépend de x

Exemple : $3\,x + 2$

C'est une expression du premier degré.

Je peux résoudre $3\,x + 2 > 0$:

$3\,x + 2 > 0 \Leftrightarrow 3\,x > -2 \Leftrightarrow x > -2/3$

Donc l'expression $3\,x + 2$ n'est strictement positive que pour $x > -2/3$.

Quelques cas où le signe dépend de x

Exemple : $3x^2 – 2x – 1$

C’est une expression du second degré.

Ses racines sont (…) 1 et – 1/3 et elle a le signe de a sauf entre les racines :

$3x^2 – 2x – 1 > 0 \Leftrightarrow x < – 1/3$ ou $x > 1$.

Quelques cas où le signe dépend de x

Exemple : signe de *f* ’ quand $f(x) = x - \sqrt{x}$

$f'(x) = \dfrac{2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$ est une fraction.

J’étudie alors le signe du dénominateur :

$$2\sqrt{x}-1>0 \Leftrightarrow \sqrt{x}>1/2 \Leftrightarrow x>1/4$$

et le signe du numérateur : $2\sqrt{x}>0$

Donc la dérivée est strictement positive seulement quand *x* > 1/4 et la fonction *f* est strictement croissante sur]1/4 ; +∞[.

Exemple 7 du cours

Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$ par

$$f(x) = \frac{x^2+3x+4}{x+3}.$$

① $f'(x) = \dfrac{(2x+3)(x+3) - 1.(x^2+3x+4)}{(x+3)^2} = \dfrac{x^2+6x+5}{(x+3)^2}$.

② $(x+3)^2$ est toujours positif donc $f'(x)$ a le même signe que x^2+6x+5. Cette fonction du second degré a le signe de $a = 1$ donc est positive sauf entre les racines (…) $x_1 = -1$ et $x_2 = -5$.

③ En remarquant que -3 est une valeur interdite, ceci donne le tableau suivant :

x	$-\infty$		-5		-3		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	-7	$\searrow$	‖	$\searrow$	1	$\nearrow$	

48 page 125

Pour les exercices 45 à 48, calculer la dérivée de f puis dresser son tableau de variation sur l'ensemble $\mathscr{D}$. Préciser les extremums lorsqu'ils existent.

45 $f(x) = -3x^2 + x + \sqrt{x}$; $\mathscr{D} = [0 ; +\infty[$.

46 $f(x) = 2x - 3x^2 + \dfrac{5}{2}$; $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

47 $f(x) = -\dfrac{2}{3}x^2 + \dfrac{1}{3}x + 1$; $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

48 $f(x) = -x - \dfrac{2}{x}$; $\mathscr{D} = \mathbb{R}^*$.

48 page 125

48 $f'(x) = -1 + \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{2 - x^2}{x^2}$;

$f'(x) > 0$ pour $x \in \left]-\sqrt{2}\,;0\right[\cup \left]0\,;\sqrt{2}\right[$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty \;\Vert\; -\infty$	$\nearrow$	$-2\sqrt{2}$	$\searrow$	$-\infty$

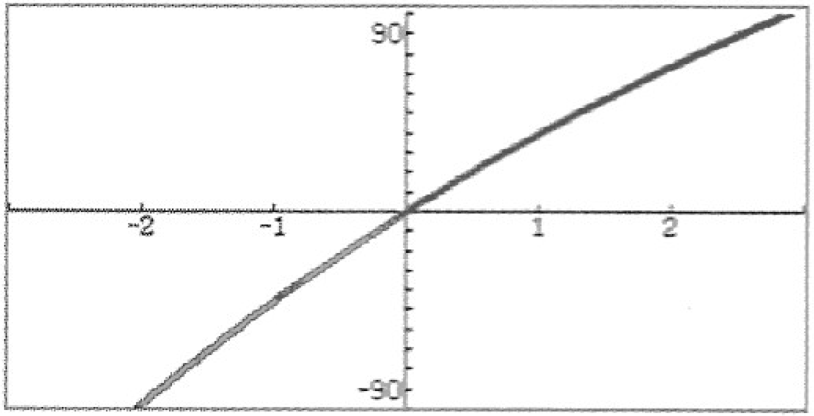
f admet un minimum sur $\left]-\infty\,;0\right[$, $2\sqrt{2}$, et un maximum sur $\left]0\,;+\infty\right[$, $-2\sqrt{2}$.

Exercice 1 (fiche d'exercices)

h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \frac{1}{9}x^3 - 3x^2 + \frac{128}{3}x$$

Chloé a tracé la courbe représentative de la fonction h à l'écran de sa calculatrice (*fenêtre* : $-3 \leqslant X \leqslant 3$, pas 1 et $-100 \leqslant Y \leqslant 100$, pas 10).



Elle affirme : « La fonction h est croissante sur $\mathbb{R}$. »

a) Déterminer $h'(x)$ et étudier son signe.

b) Chloé a-t-elle raison ? Justifier.

Exercice 1 (fiche d’exercices)

- Je calcule la dérivée :

  f’(x) = x²/3 – 6x + 128/3
- Elle est du second degré,

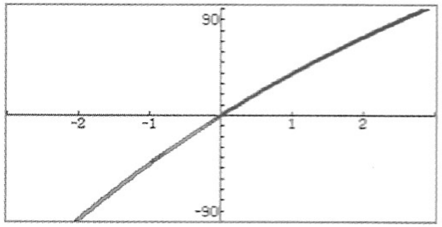
  son discriminant est –188/9

  donc elle n’a pas de racine.
- La dérivée reste donc du signe de a = 1/3 donc est positive sur IR.
- La fonction est donc bien croissante sur IR.

h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \frac{1}{9}x^3 - 3x^2 + \frac{128}{3}x$$

Chloé a tracé la courbe représentative de la fonction *h* à l’écran de sa calculatrice (*fenêtre* : $-3 \leqslant X \leqslant 3$, pas 1 et $-100 \leqslant Y \leqslant 100$, pas 10).



Elle affirme : « La fonction *h* est croissante sur $\mathbb{R}$. »

a) Déterminer $h'(x)$ et étudier son signe.

b) Chloé a-t-elle raison ? Justifier.

Exemple 8 du cours

Étude des variations d'une fonction du second degré, par exemple $f(x) = -3\,x^2 + 18\,x + 5$ sur $\mathbb{R}$.

① $f'(x) = -6\,x + 18$.

② Le signe de $f'(x)$ dépend ici de x :

$f'(x) > 0 \iff -6\,x + 18 > 0 \iff -6\,x > -18 \iff x < 3$.

③ Voici donc le tableau de signe de f' et de variation de f :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
Signe de f'		$+$	0	$-$	
Variations de f		$\nearrow$	32	$\searrow$	

Exercice 16 page 123

16 On pose $f(x) = x^2 - 2x$, pour $x \in \mathbb{R}$.

a. Étudier les variations de f.

b. En déduire la comparaison des nombres $f(1{,}01)$ et $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Exercice 16 page 123

16 $f'(x) = 2x - 2$; $f'(x) > 0$ pour $x > 1$.

a.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

b. $\dfrac{\pi}{3} \sim 1,05$; $1,01 < \dfrac{\pi}{3}$.

Sur $]1\,;+\infty[$, f est croissante.

D'où : $f(1,01) < f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

Cas des fonctions du second degré

Propriété 2

Tableaux de variations de f définie par $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ sur $\mathbb{R}$:
Si $a > 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2\,a}$		$+\infty$
Signe de f'		$-$	0	$+$	
Variations de f		$\searrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\nearrow$	

Si $a < 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2\,a}$		$+\infty$
Signe de f'		$+$	0	$-$	
Variations de f		$\nearrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\searrow$	

Démonstration

① $f'(x) = 2a\,x + b$.
② Le signe de $f'(x)$ dépend ici de x :

$$f'(x) > 0 \iff 2a\,x + b > 0 \iff 2a\,x > -b$$
$$\iff x > -\frac{b}{2\,a} \text{ si } a > 0 \text{ ou } x < -\frac{b}{2\,a} \text{ si } a < 0.$$

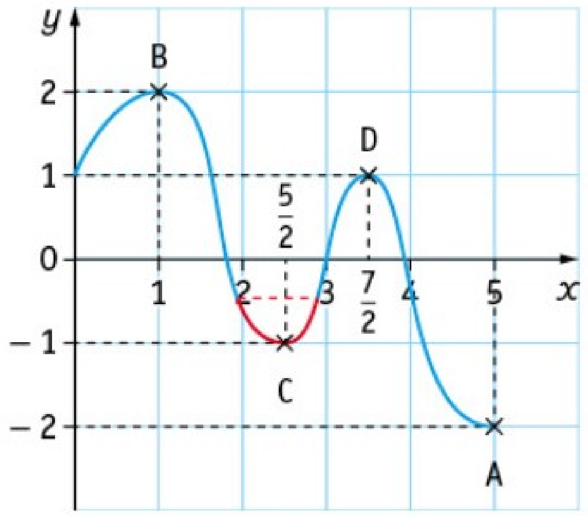
③ Donc si $a > 0$ alors f est strictement croissante sur $\left]-\frac{b}{2\,a}\,;\,+\infty\right[$ et si $a < 0$ alors f l'est sur $\left]-\infty\,;\,-\frac{b}{2\,a}\right[$.

Extrema. Manuel p.114

Considérons la fonction f dérivable sur $[0;5]$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.

• A est le point « le plus bas » de la courbe.
On dira que $f(5)$ est le minimum de f sur $[0;5]$.

• B est le point « le plus haut » de la courbe.
On dira que $f(1)$ est le maximum de f sur $[0;5]$.



• C n'est pas le point « le plus bas » de toute la courbe, mais C est le point « le plus bas » d'une portion de courbe « autour de C », par exemple la portion coloriée en rouge.
On dira que f admet un minimum local en $\frac{5}{2}$.
On peut remarquer que la tangente à la courbe en C semble horizontale.
Il en est de même en D et en B.

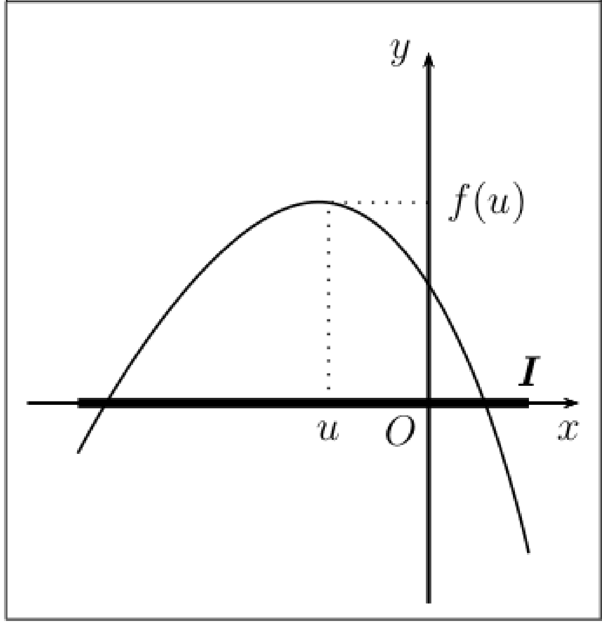
Extrema. Cours

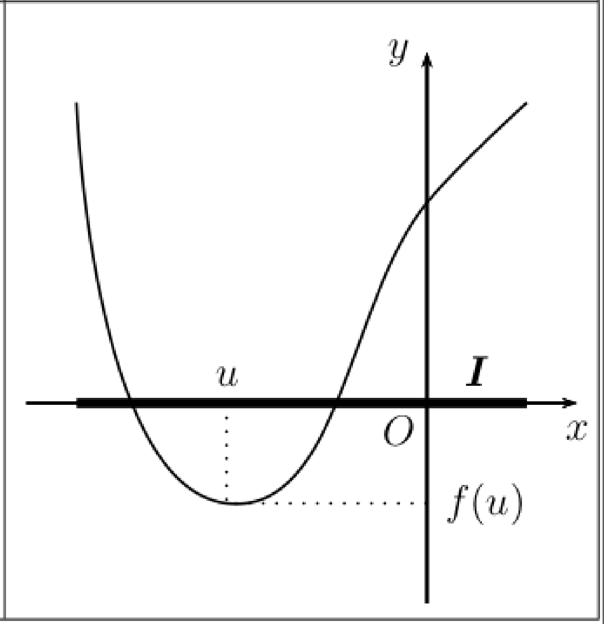
3) Extremum d'une fonction

Définition

Soit f une fonction définie sur I et u un nombre appartenant à I.

Le nombre $f(u)$ est le maximum de f sur I si, pour tout x de I, on a $f(x) \leqslant f(u)$.	Le nombre $f(u)$ est le minimum de f sur I si, pour tout x de I, on a $f(x) \geqslant f(u)$.





Extrema. Cours

Remarques

- un extremum est un maximum ou un minimum ;
- s'il n'est un extremum que sur un sous-intervalle de l'ensemble de définition, nous disons qu'il est local ; dans l'exemple 7, -7 est un maximum local car il n'est maximum que sur $]-\infty\,;\,-3[$;
- si $f(u)$ est un extremum (local ou non) alors $f'(u) = 0$;
- la réciproque est fausse : si $f(x) = x^3$ alors $f'(0) = 3 \times 0^2 = 0$ mais f n'a aucun extremum en 0.

Propriété 3

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $a \in I$.
f a un extremum (maximum ou minimum) local ou global en a si et seulement si f' s'annule en a en changeant de signe.

Extrema. Cours

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 + 4x^3 - 16x + 2$.
Prouver que $f'(x) = 4(x+2)^2(x-1)$. En déduire l'existence ou non d'extrema pour f.

① D'une part, $f'(x) = 4x^3 + 12x^2 - 16$.
D'autre part,

$$\begin{aligned} 4(x+2)^2(x-1) &= 4(x^2 + 4x + 4)(x-1) \\ &= 4(x^3 + 4x^2 + 4x - x^2 - 4x - 4) \\ &= 4x^3 + 12x^2 - 16 = f'(x). \end{aligned}$$

② $4(x+2)^2$ reste positif (mais s'annule en -2) donc $f'(x)$ a le signe de $x - 1$ et nous savons que $x - 1 > 0 \iff x > 1$.

Extrema. Cours

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 + 4\,x^3 - 16\,x + 2$.
Prouver que $f'(x) = 4(x+2)^2(x-1)$. En déduire l'existence ou non d'extrema pour f.

③ D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
4		$+$		$+$		$+$	
$(x+2)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de f'		$-$	0	$-$	0	$+$	
Variation de f		$\searrow$	18	$\searrow$	-9	$\nearrow$	

④ f' s'annule en 1 en changeant de signe donc $f(1) = -9$ est un extremum local (ici un minimum local).
Par contre, f' s'annule en -2 sans changer de signe donc $f(-2) = 18$ n'est pas un extremum.

Exercice 11 page 122

11 Une entreprise fabrique une quantité q d'un certain produit. q est exprimé en tonnes. Le coût total de production est en milliers d'euros :

$$C(q) = q^2 - 30q + 320.$$

Pour quelle valeur de q, $C(q)$ est-il minimal ?

Exercice 11 page 122

$$C'(q) = 2\,q - 30$$

donc

$C'(q) > 0 \iff 2\,q - 30 > 0 \Leftrightarrow 2\,q > 30 \Leftrightarrow q > 15$.

La fonction est donc strictement croissante sur [15 ; +∞[et strictement décroissante sur [0 ; 15].

$C(q)$ est donc minimal pour $q = 15$ tonnes (non demandé : le coût correspondant est $C(15) = 95$ donc 95 000 euros).

Exercice 2 de la fiche

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 1$$

a) Déterminer $f'(x)$ et étudier son signe.

b) Dresser le tableau de variations de f.

c) En déduire les extremums locaux de f.

Exercice 2 de la fiche

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 1$$

a) Déterminer $f'(x)$ et étudier son signe.

b) Dresser le tableau de variations de f.

c) En déduire les extremums locaux de f.

a) $f'(x) = 6x^2 - 6x - 36$.

Cette fonction est du second degré donc elle a le signe de a sauf entre les racines éventuelles.

Or elle a deux racines (calculer Δ etc.) : -2 et 3.

Comme $a = 6 > 0$,

- sur $]-\infty ; -2[$, $f'(x)$ est strictement positive ;
- sur $]-2 ; 3[$, $f'(x)$ est strictement négative ;
- sur $]3 ; +\infty[$, $f'(x)$ est strictement positive.

Exercice 2 de la fiche

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 1$$

a) Déterminer $f'(x)$ et étudier son signe.

b) Dresser le tableau de variations de f.

c) En déduire les extremums locaux de f.

b) Le signe de f' donne les variations de f. Donc, d'après le a) :

- sur $]-\infty\,;-2[$, f est strictement croissante ;
- sur $]-2\,;3[$, f est strictement décroissante ;
- sur $]3\,;+\infty[$, f est strictement croissante.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	45	↘	-80	↗	

Exercice 2 de la fiche

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 1$$

a) Déterminer $f'(x)$ et étudier son signe.

b) Dresser le tableau de variations de f.

c) En déduire les extremums locaux de f.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	45	$\searrow$	-80	$\nearrow$	

c) 45 est un maximum local et – 80 est un minimum local.

81 p.130

81 **En Corse**

Un berger corse dispose d'un champ situé devant sa bergerie. Il décide de poser une clôture pour obtenir un enclos rectangulaire dont l'un des côtés sera le mur de la bergerie selon le plan ci-dessous.

Ce champ doit avoir une aire de 300 m².

Le but de l'exercice est de trouver les dimensions x et y du champ pour que la longueur de la clôture soit minimale.

a. Sachant que l'aire du champ est égale à 300 m², exprimer y en fonction de x.

b. Exprimer en fonction de x la longueur de la clôture, notée $\ell(x)$. On vérifiera que $\ell(x) = \dfrac{2x^2+300}{x}$.

c. Calculer la dérivée ℓ' de ℓ.

d. Étudier les variations de ℓ sur $]0\,;+\infty[$.

e. En déduire les dimensions x et y pour lesquelles la clôture a une longueur minimale. Préciser cette longueur.

81 page 130

81 **1.** $xy = 300$, soit $y = \dfrac{300}{x}$.

2. $\ell(x) = y + 2x = \dfrac{300}{x} + 2x$.

3. $\ell'(x) = -\dfrac{300}{x^2} + 2 = \dfrac{2x^2 - 300}{x^2}$.

4. $\ell'(x) > 0$ pour $x > 5\sqrt{6}$.

x	0			$5\sqrt{6}$			$+\infty$
$\ell'(x)$	‖		$-$	0	$+$		
ℓ	‖	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$+\infty$

5. La clôture aura une longueur minimale pour $x = 5\sqrt{6}$ ($x \approx 12{,}25$ m). La longueur sera égale à environ 49 m.

Exercice 3 de la fiche : à faire sur feuille

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{2x}{x^2 + 4}$$

a) Afficher la courbe représentative de la fonction g à l'écran de la calculatrice et conjecturer les extremums locaux de g.

b) Démontrer les conjectures précédentes.

82 page 130

82 De la plaque à la gouttière

On dispose d'une plaque de zinc rectangulaire de longueur 5 m et de largeur 32 cm pour fabriquer une gouttière de section rectangulaire de la façon indiquée ci-contre.

On note x la longueur, en cm, de la partie pliée.

On se propose de trouver x pour que le volume de la gouttière soit maximal.

1. Déterminer l'intervalle dans lequel varie x.

2. Déterminer la section $S(x)$ de la gouttière en fonction de x.

3. Déterminer la fonction dérivée de S et en déduire les variations de S.

4.a. Pour quelle valeur de x le volume de la gouttière est-il maximal ?

b. Quel est le volume maximal de la gouttière ?

82 page 130

82 **1.** $0 \leqslant x \leqslant 0{,}16$.

2. $S(x) = x \times (0{,}32 - 2x) = -2x^2 + 0{,}32x$.

3. $S'(x) = -4x + 0{,}32$.

$S'(x) > 0$ pour $x < 0{,}08$.

x	0		0,08		0,16
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	0,0128	↘	0

4. a. Le volume de la gouttière est $S(x) \times 5$. Il sera maximal quand $S(x)$ sera maximal, c'est-à-dire pour $x = 0{,}08$ m.

b. Il sera alors égal à 64 L.

Cours, II, 4°) Prouver des inégalités

Prouver que, pour tout x réel positif, $\sqrt{1+2\,x} \leqslant 1+x$.

Réponse :

Soit f la fonction définie sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$ par $f(x) = 1+x-\sqrt{1+2\,x}$.
Nous devons prouver que f reste positive, pour cela, nous allons ici prouver que f a un minimum positif.

Pour tout x de $[\,0\,;\,+\infty\,[$, $f'(x) = 1 - \dfrac{2}{2\sqrt{1+2\,x}} = \dfrac{\sqrt{1+2\,x}-1}{\sqrt{1+2\,x}}$.

Le dénominateur est toujours positif. Pour le numérateur remarquons que :

$$\begin{aligned} x \in [\,0\,;\,+\infty\,[\quad &\Longrightarrow \quad x \geqslant 0 \Longrightarrow 2\,x \geqslant 0 \Longrightarrow 1+2\,x \geqslant 1 \\ &\Longrightarrow^{(*)} \quad \sqrt{1+2\,x} \geqslant \sqrt{1} \Longrightarrow \sqrt{1+2\,x} - 1 \geqslant 0. \end{aligned}$$

$^{(*)}$ car la fonction racine carrée est croissante.

Le numérateur est donc aussi positif donc $f'(x) \geqslant 0$ sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$: la fonction f est croissante sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$ donc elle a pour minimum $f(0) = 1+0-\sqrt{1+2\times 0} = 0$.
Comme elle a un minimum positif, f reste positive.

51, 53 page 125

Pour les exercices 50 à 57.

a. Calculer $f'(x)$.

b. Dresser le tableau de variation de f.

c. En déduire les solutions de l'inéquation.

50 $f(x) = x^2 + 2x - 1$; $f(x) \leqslant -2$.

51 $f(x) = x^2 - 2x + 3$; $f(x) < 0$.

52 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - 2$; $f(x) \geqslant -\frac{1}{2}$.

53 $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$; $f(x) \geqslant 1$.

51, 53 page 125

51 **1.** $f'(x) = 2x - 2$.

2.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

3. $f(x) < 0 : \mathcal{S} = \varnothing$.

53 **1.** $f'(x) = 4x - 5$.

2.

x	$-\infty$		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{17}{8}$	$\nearrow$	$+\infty$

3. $f(x) \geqslant 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x \geqslant 0 \Leftrightarrow x(2x - 5) \geqslant 0$.

$\mathcal{S} =]-\infty\,;0] \cup \left[\frac{5}{2};+\infty\right[$.

Exercice 4 de la fiche : à faire sur feuille

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 3$$

a) Dresser le tableau de variations de la fonction g.

b) Déterminer les extremums locaux de g.

c) Démontrer que pour tout nombre réel $x \geqslant 2$:

$$g(x) \geqslant 13$$

Cours, 5°) Comparaison de deux fonctions

➯ soient f et g deux fonctions. La courbe de f est au dessus de celle de g quand $f(x) > g(x)$, autrement dit quand $f(x) - g(x) > 0$ et elle est en dessous de celle de g quand $f(x) - g(x) < 0$;

➯ si j'appelle h la fonction définie (sur un certain ensemble) par $h(x) = f(x) - g(x)$, l'étude des variations de h peut permettre de savoir à quel moment $h(x)$ est positif ou négatif.

Cours, 5°) Comparaison de deux fonctions

Étudier les positions relatives de la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ et de sa tangente en son point d'abscisse 2.

L'équation de cette tangente est $y = f'(2)(x-2) + f(2) = 12\,x - 16$.
La courbe de f est au dessus de sa tangente quand $f(x) > 12\,x - 16$ donc quand $f(x) - (12\,x - 16) > 0$.

Soit donc h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = x^3 - (12\,x - 16) = x^3 - 12\,x + 16.$$

Cours, 5°) Comparaison de deux fonctions

Alors $h'(x) = 3\,x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x-2)(x+2)$.

D'où le tableau de variations de h :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
3		$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de h'		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variation de h		$\nearrow$	32	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Il semblerait (calculatrice graphique...) que $h(-4) = 0$ et, en effet :
$h(-4) = (-4)^3 - 12(-4) + 16 = -64 + 48 + 16 = 0$.

Donc, d'après le tableau de variations de h :

- sur $]-\infty\,;\,-4[$: $h(x) < 0$ donc la courbe est en dessous de sa tangente ;
- sur $]-4\,;\,+\infty[$: $h(x) \geqslant 0$ donc la courbe est au dessus de sa tangente.

Exercice 5 de la fiche

Comparez x et x^2 :
a) en utilisant les variations de la fonction $h(x) = x^2 - x$;
b) en résolvant directement $x^2 > x$.

Exercice 5 de la fiche

Comparez x et x^2 :
a) en utilisant les variations de la fonction $h(x) = x^2 - x$;
b) en résolvant directement $x^2 > x$.

a) Nous voulons savoir à quel moment (pour quels x) $h(x)$ est positive et à quel moment elle est négative. Pour cela, nous allons étudier les variations de h en espérant qu'elles nous donnent la réponse à cette question.

$h'(x) = 2x - 1$ donc $h'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1/2$ d'où :

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	$-1/4$	$\nearrow$	

Ce tableau ne permet pas de conclure, nous savons juste que $h(x)$ est négative à un moment (quand $x = 1/2$).

Exercice 5 de la fiche

Comparez x et x^2 :
a) en utilisant les variations de la fonction $h(x) = x^2 - x$;
b) en résolvant directement $x^2 > x$.

Cherchons à quel moment elle s'annule :
$h(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$.
(vous pouviez aussi utiliser le discriminant, etc.)

x	$-\infty$	0	$1/2$	1	$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+$ ↘	$0\ -$	$-1/4$	$-\ 0$ ↗	$+$

Maintenant, nous pouvons conclure :
$h(x)$ est strictement positive sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]1\,;+\infty[$ et strictement négative sur $]0\,;1[$ donc :
$x^2 > x$ si $x < 0$ ou $x > 1$ et $x^2 > x$ si $0 < x < 1$.

Exercice 5 de la fiche

Comparez x et x^2 :
a) en utilisant les variations de la fonction $h(x) = x^2 - x$;
b) en résolvant directement $x^2 > x$.

b) Résolution directe :
$x^2 > x \Leftrightarrow x^2 - x > 0 \Leftrightarrow x\,(x-1) > 0$; il suffit ensuite de faire un tableau de signes (remarquez que $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$) :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 6 de la fiche

Étudiez les positions relatives de la courbe de la fonction définie sur IR \ {1} par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ et de sa tangente en son point d'abscisse 2.

Exercice 6 de la fiche

Étudiez les positions relatives de la courbe de la fonction définie sur IR \ {1} par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ et de sa tangente en son point d'abscisse 2.

f'(x) = – 3/(x – 1)² Eq tgte : y = 3 x – 11

h'(x) = (3x² – 6x)/(x – 1)²

h croissante sur] – oo ; 0 [jusqu'à – 10 puis décroissante sur]0 ; 1[

h décroissante sur]1 ; 2[jusqu'à 0 puis croissante sur]2 ; +oo[

h négative sur] – oo ; 1[et positive sur]1 ; +oo[

donc la courbe est en dessous sur] – oo ; 1[et au dessus sur]1 ; +oo[.

96 page 134

96 Avec des probabilités

1. Une urne contient n boules, trois blanches et les autres noires (donc $n > 3$). On tire au hasard une boule de l'urne et on note $p(n)$ la probabilité de tirer une boule noire.
Calculer $p(n)$.

2. On ajoute une boule noire dans l'urne, puis on tire une boule au hasard. On note $q(n)$ la probabilité de tirer une boule noire.
Calculer $q(n)$.

3.a. Étudier le sens de variation des fonctions f et g définies sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x-3}{x}$ et $g(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$.

b. Construire leurs courbes représentatives dans un même repère.

c. Comparer les fonctions f et g sur $[3;+\infty[$.

d. En déduire que pour tout $n \geqslant 3$, $q(n) > p(n)$.

e. Ce dernier résultat était prévisible. Pourquoi ?

96 page 134

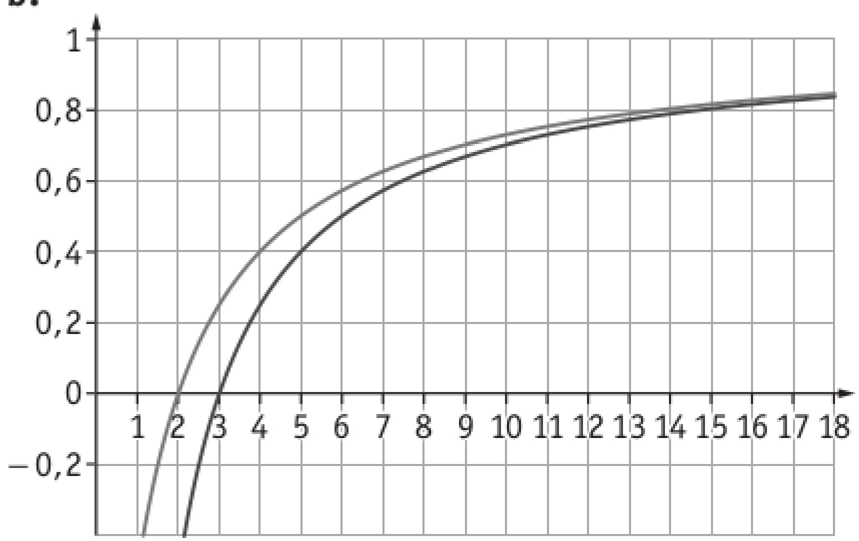
96 **1.** $p(n) = \dfrac{n-3}{n}$.

2. $q(n) = \dfrac{n-2}{n+1}$.

3. a. $f'(x) = \dfrac{3}{x^2}$; $f'(x) > 0$ pour tout x de $]0\,;+\infty[$, donc f est croissante sur $]0\,;+\infty[$.

$g'(x) = \dfrac{3}{(x+1)^2}$; $g'(x) > 0$ pour tout x de $]0\,;+\infty[$, donc g est croissante sur $]0\,;+\infty[$.

b.



c. Pour $x \in [3\,;+\infty[$,

$$\frac{x-3}{x} - \frac{x-2}{x+1} = \frac{(x-3)(x+1) - x(x-2)}{x(x+1)} = \frac{-3}{x(x+1)} < 0.$$

Donc pour tout $x \in [3\,;+\infty[$, $f(x) < g(x)$.

d. On a donc $q(n) > p(n)$ pour $n \geqslant 3$ car $q(n) = g(n)$ et $p(n) = f(n)$.

e. Ce résultat était prévisible puisque la probabilité d'avoir une boule blanche est $\dfrac{3}{n}$ dans le premier cas et $\dfrac{3}{n+1}$ dans le second, c'est-à-dire plus petite.