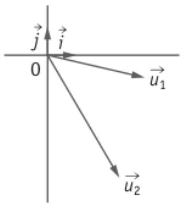
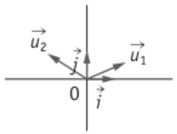
62 page 205

62 a.



$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 4\times 3 + (-1)\times(-5) = 17$

b.

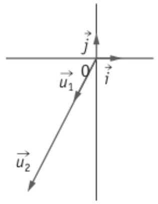


$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = (\sqrt{3})(-\sqrt{3}) + \frac{1}{2}\times 1$

$= -3 + \frac{1}{2}$

$= -\frac{5}{2}$

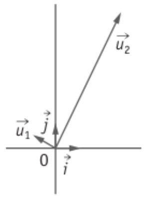
c.



$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = (-1)(-3) + (-2)(-6)$

$= 15$

d.



$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = (-1)\times 3 + \frac{1}{2}\times 6$

$= 0$

53 page 205

53 a. $\vec{u}_1\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2\begin{pmatrix}2\\y\end{pmatrix}$, on a $6-y=5$ d'où $y=1$.

b. On a $6-y=-1$ d'où $y=7$.

c. On a $6-y=0$ d'où $y=6$.

2 page 202

2 $\vec{u}\cdot\vec{v} = (-2)\times 3 + 3\times 2 = 0$ donc ils sont orthogonaux.

15 page 202

Pour calculer les coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$, il suffit d'ajouter celles de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$!

15 $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{u}-\vec{v}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ donc $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=0$, donc $(\vec{u}+\vec{v})$ et $(\vec{u}-\vec{v})$ sont orthogonaux.

7 page 202

Il faut d'abord calculer les coordonnées des vecteurs, à partir de celles des points, grâce à la propriété rappelée au début du cours.

7 $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 1\times 4 + (-3)\times 1 = 1$, donc (AB) et (AC) ne sont pas perpendiculaires.

Correction de l'ex. I du TP

1°) a) Si $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = 4\times 2 + (-1)\times 8 = 0$ donc $\vec{u}\perp\vec{v}$.

b) Si $\vec{u}\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = 8\times(-2) + 3\times 5 = -1 \neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.

c) Si $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = (-1)\times 3 + 7\times(-2) = -17 \neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.

2°) La première étape est de faire une figure pour savoir en quel point le triangle est susceptible d'être rectangle puis de vérifier si un produit scalaire est nul. Pour une démonstration plus rigoureuse, il faudrait faire trois produits scalaires, un pour chaque sommet du triangle…

a) *A* (11 ; – 2) ; *B* (8 ; – 5) et *C* (5 ; – 3) : l'angle droit semble être en B.

Il faut donc regarder si les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux. Or :

$$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}x_A - x_B\\ y_A - y_B\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11-8\\ -2-(-5)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}x_C - x_B\\ y_C - y_B\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5-8\\ -3-(-5)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$$

donc $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=3\times(-3)+3\times2=-3\neq0$ donc $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas orthogonaux et le triangle ABC n'est pas rectangle (en B en tout cas…)

b) A (2 ; 1) ; B (10 ; 3) et C (3 ; – 3) : l'angle droit semble être en A.

Il faut donc regarder si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

Or $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10-2\\3-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x_C-x_A\\y_C-y_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-2\\-3-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=8\times1+2\times(-4)=0$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux et le triangle ABC est rectangle en A.

c) Créez :

- un curseur nommé c (avec l'outil curseur puis propriétés pour renommer) ;
- modifiez si nécessaire les valeurs possibles de c (avec propriétés) ;
- le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}$ en tapant : u=(– 4,6) ;
- le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}12\\c\end{pmatrix}$ en tapant : v=(12,c) ;
- le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ en tapant : u*v

  Geogebra l'appellera par exemple « a ».

Puis déplacez le curseur « c » jusqu'à ce que « a » soit égal à 0 ; nous trouvons que $\vec{u}\perp\vec{v}$ quand

c = 8.

Par le calcul : $\vec{u}\cdot\vec{v}=-4\times12+6\times c=0\Leftrightarrow 6c=48\Leftrightarrow c=48/6=8$.

Calcul des normes des vecteurs du 62 page 205

a.

$\vec{u}_1\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ donc $\|\vec{u}_1\|=\sqrt{4^2+(-1)^2}=\sqrt{16+1}=\sqrt{17}$

$\vec{u}_2\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$ donc $\|\vec{u}_2\|=\sqrt{3^2+(-5)^2}=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$

b.

$\vec{u}_1\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1/2\end{pmatrix}$ donc $\|\vec{u}_1\|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{3+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{13}{4}}=\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{13}}{2}$

$\vec{u}_2\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$ donc $\|\vec{u}_2\|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$

c.

$\vec{u}_1\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ donc $\|\vec{u}_1\|=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

$\vec{u}_2\begin{pmatrix}-3\\-6\end{pmatrix}$ donc $\|\vec{u}_2\|=\sqrt{(-3)^2+(-6)^2}=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}=\sqrt{9}\times\sqrt{5}=3\sqrt{5}$

d.

$\vec{u}_1\begin{pmatrix}-1\\1/2\end{pmatrix}$ donc $\|\vec{u}_1\|=\sqrt{(-1)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

$\vec{u}_2\begin{pmatrix}-3\\-6\end{pmatrix}$ donc $\|\vec{u}_2\|=\sqrt{3^2+6^2}=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

20 page 202

Il faut d'abord calculer les coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$ en ajoutant celles de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ puis ensuite calculer la norme du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$.

20 $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|=\sqrt{(2+6)^2+(-1+0)^2+(0+3)^2}=\sqrt{74}.$

19 page 202

19 $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(2-1)^2+(0-1)^2+(-2-1)^2} = \sqrt{11}.$

21 page 202

21 **a.** $O(0\,;0\,;0)$ et $F(1\,;1\,;1)$
d'où $OF = ||\overrightarrow{OF}|| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$

b. $I\left(1\,;\dfrac{1}{2}\,;0\right)$ et $G(0\,;1\,;1)$

d'où $IG = \sqrt{1^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+1^2} = \dfrac{3}{2}$