Cours – Exercices : Suites arithmétiques ou géométriques

I. Suites arithmétiques

Une suite (u_n) est dite **arithmétique** si l'on passe d'un terme à son suivant en ajoutant un nombre constant appelé **raison** et noté r, c'est-à-dire si, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$.

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} \dots \xrightarrow{+r} u_n \xrightarrow{+r} u_{n+1} \xrightarrow{+r} \dots$$

Exercice I

Les suites de nombres suivantes peuvent-elles être arithmétiques :

1°) $3\,;\,5\,;\,7\,;\,11\,;\,13\,;\,17\,;\,\dots$

2°) $2\,;\,4\,;\,8\,;\,16\,;\,32\,;\,64\,;\,\dots$

3°) $5\,;\,4\,;\,3\,;\,2\,;\,1\,;\,0\,;\,\dots$

4°) $\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{6}\,;\,-\frac{1}{6}\,;\,-\frac{1}{2}\,;\,-\frac{5}{6}\,;\,\dots$

Exercice II

Soit la suite arithmétique (u_n) de raison -2 et de premier terme $u_0 = 15$.

1°) Donnez les quatre premiers termes de cette suite.

2°) Complétez : $u_{n+2} = \dots\dots\dots\dots - 2 = \dots\dots\dots\dots - 4$.

3°) a) Conjecturez la valeur de u_{50}.

b) Vérifiez votre conjecture grâce à la calculatrice « en mode Suite ».

Propriété 1 (Expression du terme général d'une suite arithmétique)

Si (u_n) est arithmétique de raison r alors, on a pour tout $n \geqslant 0$ (ou $n \geqslant 1$),

$$\boxed{u_n = u_0 + nr \ \text{(ou } u_n = u_1 + (n-1)r\text{)}}.$$

Exercice III

1°) Donnez, pour chacune des suites arithmétiques (u_n), l'expression de u_n en fonction de n :

a) $u_0 = -5$ et $r = 3$.

b) $u_0 = 10$ et $r = -\frac{1}{2}$.

c) $u_1 = 8$ et $r = -2$.

d) $u_3 = 12$ et $r = -5$.

2°) Déduisez-en la valeur de u_{100} pour chacune d'entre elles.

Pour vous entraîner : exercices 31 à 36 page 48.

Exercice IV

1°) Soit (u_n) définie par $u_n = -3\,n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Écrivez u_{n+1} puis $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n.

b) La suite (u_n) est-elle arithmétique ?

2°) Les suites suivantes sont-elles arithmétiques ?

a) (u_n) définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) (u_n) définie par $u_0 = -3$ et $u_n = u_{n-1} + 2$ pour tout $n \geq 1$.

c) (u_n) définie par $u_n = -1 + 3n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

e) (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour vous entraîner : exercices 37 à 40 page 48.

Exercice V

Dans les questions suivantes, la suite (u_n) est arithmétique, de raison r.

1°) On donne $u_0 = -30$ et $r = 9$. Calculer u_1, u_2 et u_{10}.

2°) On donne $u_1 = 12$ et $r = 6$. Calculer u_2 et u_{19}.

3°) On donne $u_3 = 5$ et $r = -2$. Calculer u_{17} et u_0.

4°) On donne $u_1 = 39$ et $u_7 = 21$. Calculer r et u_{30}.

5°) On donne $u_3 = 31$, $r = 12$ et $u_p = 187$. Calculer u_1, p.

Pour vous entraîner : exercices 96 à 101 page 51.

Mise en pratique de ces suites arithmétiques : exercices 103 page 51 et 52 ; 105 page 52.

II. Suites géométriques

Une suite (u_n) est dite **géométrique** si l'on passe d'un terme à son suivant en le multipliant par un nombre constant appelé **raison** et noté q, c'est-à-dire si, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{u_{n+1} = q.u_n}.$$

$$u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \xrightarrow{\times q} \dots \xrightarrow{\times q} u_n \xrightarrow{\times q} u_{n+1} \xrightarrow{\times q} \dots$$

Exercice VI

Les suites de nombres suivantes peuvent-elles être géométriques :

1°) $2\,;\,4\,;\,6\,;\,8\,;\,10\,;\,12\,;\,\dots$

2°) $16\,;\,8\,;\,4\,;\,2\,;\,1\,;\,\dots$

3°) $3\,;\,-3\,;\,3\,;\,-3\,;\,3\,;\,-3\,;\,\dots$

4°) $\frac{1}{2}\,;\,-\frac{1}{6}\,;\,\frac{1}{6}\,;\,-\frac{1}{2}\,;\,\frac{5}{6}\,;\,\dots$

Exercice VII

Soit la suite géométrique (u_n) de raison -2 et de premier terme $u_0 = 15$.

1°) Donnez les quatre premiers termes de cette suite.

2°) a) Conjecturez la valeur de u_{50}.

b) Vérifiez votre conjecture grâce à la calculatrice « en mode Suite ».

Propriété 2 (Expression du terme général d'une suite géométrique)

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q alors, pour tout $n \geqslant 0$ (ou $n \geqslant 1$)

$$\boxed{u_n = q^n u_0 \text{ (ou } u_n = q^{n-1} u_1)}.$$

Exercice VIII

Donnez, pour chacune des suites géométriques (u_n), l'expression de u_n en fonction de n :

1°) $u_0 = -2$ et $q = 4$.

2°) $u_0 = 4$ et $q = -\frac{1}{2}$.

3°) $u_1 = 8$ et $q = -1$.

4°) $u_3 = 10$ et $q = 0{,}1$.

Pour vous entraîner : exercices 41 à 44 page 48.

Exercice IX

En calculant si nécessaire $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, dire si les suites suivantes sont géométriques ou non.

1°) (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_n = -2\,u_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2°) (u_n) définie par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = 2 + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3°) (u_n) définie par $u_n = \frac{3}{10^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4°) (u_n) définie par $u_n = n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5°) (u_n) définie par $u_n = 5 \times 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour vous entraîner : exercices 46 à 48 page 48.

Exercice X

Dans les questions suivantes, la suite (u_n) est géométrique, de raison q.

1°) On donne $u_0 = 50$ et $q = 0{,}2$. Calculez u_1, u_2, u_{11}.

2°) On donne $u_1 = 8192$ et $q = 0{,}5$. Calculez u_{13}.

3°) On donne $u_4 = 5$ et $q = -1$. Calculez u_{20}.

4°) On donne $u_1 = 3$ et $u_8 = 49152$. Déterminez q.

5°) On donne $u_3 = 5{,}2$, $q = 5$, $u_p = 81250$. Calculez u_0 et p.

Pour vous entraîner : exercices 107 à 113 page 52.

Exercice XI

Bob place un capital C_0 de 2000 € sur un livret d'épargne au taux annuel de 3 %. Les intérêts s'ajoutent à la valeur acquise du capital et produisent à leur tour des intérêts (intérêts composés).

1°) Calculez la valeur du capital après 1 an.

2°) Calculez la valeur du capital après 2 ans.

3°) Démontrez que la suite des capitaux (C_n) est géométrique.

4°) Combien Bob aura-t-il sur son compte dans 8 ans ?

Exercice XII

Une observation faite par un journal, sur ses abonnés, a permis de constater, pour chaque année, un taux de réabonnement voisin de 75 % ainsi que l'apparition de 4000 nouveaux abonnés. On suppose que la situation décrite par l'observation reste la même au fil des ans. On note a_n le nombre des abonnés après n années et on précise que $a_0 = 10\,000$.

1°) Calculez le nombre d'abonnés au bout d'une année.

2°) Expliquez pourquoi, pour tout nombre entier naturel n :

$$a_{n+1} = 0{,}75\, a_n + 4000.$$

3°) Démontrez que (a_n) n'est ni une suite arithmétique, ni une suite géométrique.

4°) Soit (u_n) la suite définie, pour tout nombre entier naturel n, par :

$$u_n = 16000 - a_n.$$

- **a)** Prouvez que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,75.
- **b)** Exprimez u_n en fonction de n.
- **c)** En déduire une expression de a_n en fonction de n.
- **d)** Déterminer la première année pour laquelle le nombre d'abonnés dépassera 15 000.

Exercice XIII

Un prof de maths a acheté une ramette de papier de type « 90 g », qui comporte 500 feuilles et fait 5 cm d'épaisseur.
Un des pieds de son bureau n'étant pas droit, il a commencé à plier une des feuilles une fois, puis deux fois, . . . pour caler son bureau.
Une question lui vient alors à l'esprit : quelle épaisseur atteindrait sa feuille pliée s'il arrivait à la plier 30 fois ?

Pouvez-vous l'aider, afin qu'il puisse retourner à ses corrections de copies ?

Exercice XIV

Sur la planète Kmirc, la baguette de pain coûte 5 clutz. Tous les ans, le prix augmente de 50 %. Programmez votre calculatrice pour qu'elle vous dise au bout de combien d'années le prix de la baguette dépassera 1 000 000 clutz.

Exercice XV

En physique, le radon est un élément radioactif : pendant une période de quatre heures, chaque radon a une probabilité d'environ 0,029 de se désintégrer en atome de polonium en émettant une particule α (noyau d'hélium). Un échantillon contient une très grande quantité d'atomes de radon, on peut considérer statistiquement que pendant une période de 4 heures, il perd effectivement 2,9 % de sa masse de radon. Au bout de combien de temps environ la masse de radon aura-t-elle été divisée par 1000 ?