Cours et exercices : Second degré (2)

Propriété 1

Pour résoudre une équation du second degré $a\,x^2 + b\,x + c$ (où $a \neq 0$), il est possible de :

① calculer le **discriminant** : $\boxed{\Delta = b^2 - 4\,a\,c}$

② observer le signe de Δ :

- si $\Delta < 0$ alors l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$;
- si $\Delta = 0$ alors l'équation a une seule solution (dite « double ») : $\boxed{x_0 = -\dfrac{b}{2a}}$
- si $\Delta > 0$ alors l'équation a deux solutions réelles :

$$\boxed{x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$$

Démonstration « remarquable »

Comme $a \neq 0$, $a\,x^2 + b\,x + c = 0 \iff x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a} = 0$

L'expression de gauche « ressemble » au début du développement de $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$; en effet :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + 2 \times x \times \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}.$$

$$\begin{aligned} a\,x^2 + b\,x + c = 0 &\iff x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0 \\ &\iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0. \end{aligned}$$

En posant $\Delta = b^2 - 4\,a\,c$:

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0 \iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}.$$

Si $\Delta < 0$ alors cette équation n'a pas de solution réelle car $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ et $4a^2$ sont positifs.

Si $\Delta \geq 0$ alors

$$\begin{aligned} a\,x^2 + b\,x + c = 0 &\iff x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &\iff x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}. \end{aligned}$$

Remarques

➫ Rappelons que les solutions de $f(x) = 0$ sont les « racines » de f.
➫ Les formules données dans la propriété 1 permettent donc de calculer les racines d'un polynome du second degré, sans avoir à passer par la forme canonique.
➫ On retrouve l'expression de x_0 en remplaçant Δ par 0 dans celles de x_1 et x_2.

Exercice I (équations du second degré)

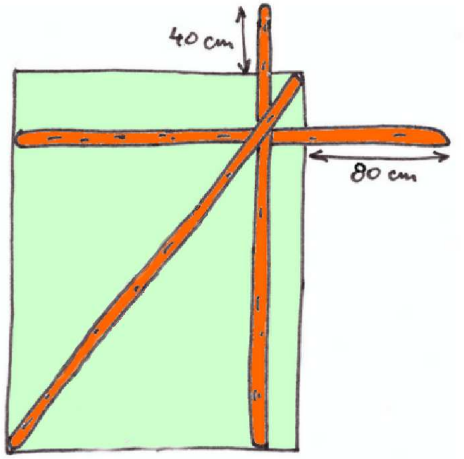
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1°) $x^2 + 3\,x - 4 = 0$	2°) $x^2 + x + 1 = 0$
3°) $x^2 + 5\,x = 0$	4°) $2\,u^2 - 8 = 0$
5°) $9 + x^2 + 6\,x = 0$	6°) $2\,t^2 - 7\,t - 4 = 0$
7°) $x^2 + 3\,x - 4 = 1 - x^2$	8°) $x^2 - 2\,x + 5 = (x-1)(x+2)$
9°) $x^2 + (2 - \sqrt{2})\,x = 3 + \sqrt{2}$	10°) $\dfrac{x+1}{x-2} = x - 3$

Exercice II

Soient $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction carré et Γ la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5\,x - 4$.
Déterminez par le calcul les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et de Γ.

Exercice III (source : https ://www.maths-et-tiques.fr/)
Le problème est extrait de l'ouvrage chinois Jiuzhang suanshu (Les Neufs Chapitres sur l'art du calcul) datant du II^{e} siècle avant J.C.
On veut faire passer par une porte dont on ne connaît ni la hauteur ni la largeur, une perche dont on ne connaît pas la longueur. Transversalement, il s'en faut de 80 cm pour que la perche ne puisse sortir par la porte, longitudinalement il s'en faut de 40 cm, et, en oblique, elle sort juste. Quelles sont les dimensions de la porte et de la perche ?



Exercice IV (changement d'inconnue)

1°) Exemple d'équation « bicarrée »
$x^4+2\,x^2-3=0 \Longleftrightarrow (x^2)^2+2\,x^2-3=0 \Longleftrightarrow X^2+2\,X-3=0$ en posant $X=x^2$ (changement d'inconnue).

La résolution de $X^2+2\,X-3=0$ donne $(\dots)$ $X=1$ et $X=-3$.

Comme $X=x^2$, cela donne $x^2=1$ ou $x^2=-3$ (impossible) donc $x^2=\pm\sqrt{1}=\pm 1$ d'où $S=\{-1;1\}$.

Résoudre de même les équations suivantes :

$$4\,x^4+4\,x^2-3=0 \qquad\qquad x^4-13\,x^2+36=0$$

2°) Résoudre les équations :

$$4\,\sin^2 x+4\,\sin x-3=0 \qquad\qquad -4\,\sin^2 x+4\,\cos x+1=0$$

Exercice V (source : https ://www.maths-et-tiques.fr/)
Un autre problème extrait de l'ouvrage chinois Jiuzhang suanshu.
A l'extérieur de la ville (supposée carrée), vingt pas après la sortie Nord, se trouve un arbre. Si tu quittes la ville par la porte Sud, marche quatorze pas vers le Sud puis 1775 vers l'Ouest et tu commenceras tout juste à apercevoir l'arbre. On cherche les dimensions de la ville.

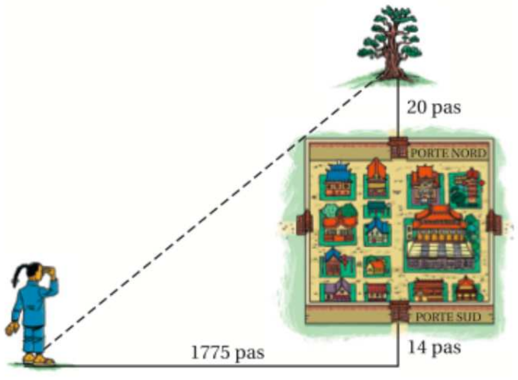


Image : Odyssée 2nde - Hatier

1°) Prouver que le problème peut se ramener à résoudre l'équation

$$x^2+34\,x-71000=0$$

où x est la longueur des côtés de la ville.

2°) Résoudre l'équation et donner la solution au problème.

3°) Prolongement : Quelle distance te sépare de l'arbre ? Donner la valeur exacte puis une valeur approchée au pas près.

Exercice VI (source : https ://www.lyceedadultes.fr)
Pour se rendre d'une ville A à une ville B distante de 195 km, deux cyclistes partent en même temps. L'un d'eux, dont la vitesse moyenne sur le parcours est supérieure de 4 km/h à celle de l'autre arrive 1 heure plus tôt. Quelles sont les vitesses moyennes des deux cyclistes ?

Pour aller plus loin

Exercice VII (trouver deux nombres connaissant leur somme et leur produit)

1°) Résoudre les systèmes d'équations suivants :

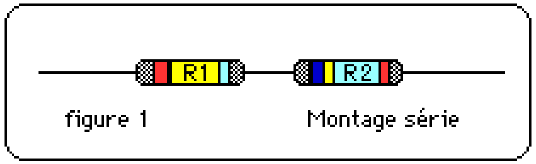
$$\begin{cases} x+y=22 \\ xy=85 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=10 \\ xy=26 \end{cases}$$

Indication : isoler y dans une des équations et remplacer y par son expression dans l'autre équation.

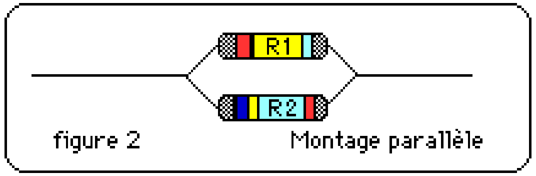
2°) Déterminez les dimensions exactes d'un rectangle d'aire 12 cm^2 et de périmètre 20 cm.

Exercice VIII (source : http ://serge.mehl.free.fr)

Quand deux résistances R_1 et R_2 sont montées en séries, la résistance équivalente est $R = R_1 + R_2$.



Quand deux résistances R_1 et R_2 sont montées en séries, la résistance équivalente R vérifie alors $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$.



On a mesuré au moyen d'un ohmmètre la résistance des circuits dans les deux cas de figure. Dans le premier cas (montage série), on a trouvé 1250 Ω et dans le second (montage parallèle) 288 Ω.
L'ohmmètre est maintenant cassé et les couleurs sur les résistances ne sont pas les bonnes...
Quelles sont les valeurs des résistances R_1 et R_2 ?

Exercice IX

Nous admettons ici le théorème fondamental suivant :

a est une racine d'un polynome $P(x) \Longleftrightarrow$ il existe un polynome $Q(x)$ tel que $P(x) = (x-a)Q(x)$.

Le but de cet exercice est de résoudre l'équation $2\,x^3+11\,x^2+14\,x-3=0$.

1°) En utilisant la calculatrice graphique, déterminez une solution entière de cette équation.

2°) Déduisez-en une factorisation de $P(x) = 2\,x^3 + 11\,x^2 + 14\,x - 3$.

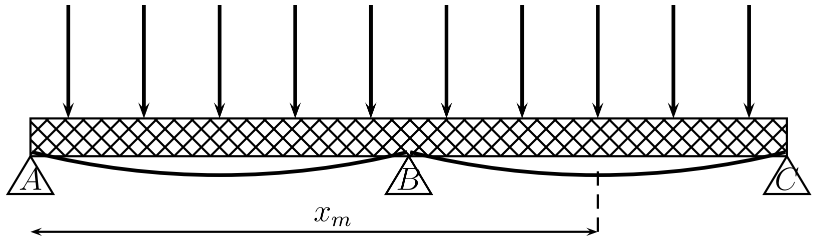
a) Quel est le degré du polynome $Q(x)$? Comment peut-on écrire ce polynome ?

b) Trouvez l'expression de ce polynome.

3°) Résolvez complétement l'équation.

Exercice X (source : xymaths.free.fr)

Une poutre de longueur 2 mètres repose sur trois appuis simples A, B et C, l'appui B étant situé au milieu de $[AC]$.
Elle supporte une charge uniformément répartie de 1 000 N.m^{-1} (newtons par mètre). Sous l'action de cette charge, la poutre se déforme.



On démontre que le point situé entre B et C où la déformation (la flèche) est maximum, a une abscisse x_m qui est solution de l'équation :

$$32\,x^3 - 156\,x^2 + 240\,x - 116 = 0.$$

1. Vérifier que 1 est solution de cette équation.
2. Factoriser alors l'équation et la résoudre.
3. En déduire x_m, position de la section de poutre de flèche maximum entre les points B et C.

Exercice XI

Nous admettons ici la propriété suivante :

Soit n un entier naturel non nul. Alors $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x^2 + x + 1)$.

1°) Factorisez $x^4 - 1$.

2°) De quel nombre se rapproche $\dfrac{x^4-1}{x-1}$ quand x s'approche de 1 ?

Remarque : le chapitre sur la dérivation donne une autre méthode pour répondre à cette question.

Exercice XII

1°) Pour quelles valeurs de m l'équation $(m+2)x^2 - (m+4)x - m + 2 = 0$ admet-elle deux racines distinctes ?

2°) Même question avec l'équation $(m-4)x^2 + (m+2)x - m = 0$.

Propriété 2

Soit $a\,x^2 + b\,x + c$ (où $a \neq 0$) un trinome du second degré.

- si $\Delta < 0$ alors $a\,x^2 + b\,x + c$ ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$;
- si $\Delta = 0$ alors $\boxed{a\,x^2 + b\,x + c = a(x - x_0)^2}$;
- si $\Delta > 0$ alors $\boxed{a\,x^2 + b\,x + c = a(x - x_1)(x - x_2)}$.

Exercice XIII (forme factorisée)

1°) Factorisez, quand c'est possible, les expressions suivantes :

a) $x^2 + 5\,x$	b) $2\,x^2 - x - 3$
c) $x^2 - x + 2$	d) $9\,x^2 - 12\,x + 4$

2°) Déduisez-en à quel(s) moment(s) chaque expression s'annule.

3°) Simplifiez les expressions suivantes :

$$\frac{3x}{x^2 - 4\,x} \qquad \frac{x^2 - 2\,x - 8}{x^2 - 4} \qquad \frac{3\,x^2 + 2\,x - 1}{(x+1)^2}$$

Propriété 3

➪ La **forme canonique** d'un trinôme s'écrit :

$$a\,x^2 + b\,x + c = a\,(x-\alpha)^2 + \beta \text{ où } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = -\frac{\Delta}{4a}.$$

➪ Les coordonnées du sommet de la parabole sont donc $(\alpha;\beta) = \left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.

➪ L'axe de symétrie de la parabole a pour équation $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Remarque

L'ordonnée du sommet peut aussi être trouvée en remplaçant x par $-\dfrac{b}{2a}$ dans l'expression de la fonction.

Exercice XIV (extremum et variation)

1°) Déterminez le maximum ou le minimum (suivant le cas) de chacune des expressions qui suivent et la valeur pour laquelle il est atteint :

a) $x^2 + 6x - 7$	b) $x^2 - 4x + 4$	c) $x^2 - 3x + 12$
d) $-x^2 - 8x - 14$	e) $-4x^2 + 2x - 7$	f) $5x^2 + 7x - 8$

2°) Faîtes le tableau de variation de chacune des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par les expressions précédentes.

Exercice XV

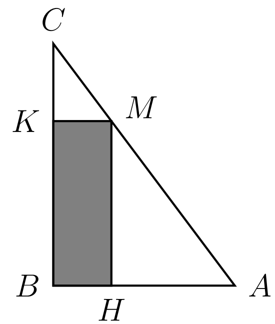
ABC est un triangle rectangle en B.
$AB = 6$ cm et $BC = 8$ cm.

1°) Calculer la longueur AC.

2°) Soit M un point sur le segment $[AC]$.

a) Calculer la surface du rectangle $BHMK$ pour $CM = 2$.

b) Déterminer le comportement de l'aire du rectangle quand M se déplace de C en A.



Propriété 4

Une fonction du second degré a le signe de a sauf entre les racines éventuelles.

Si $\Delta < 0$:

x	$-\infty$		$+\infty$
$a\,x^2 + b\,x + c$		signe de a	

Si $\Delta = 0$:

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$a\,x^2 + b\,x + c$		signe de a	0	signe de a	

Si $\Delta > 0$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$a\,x^2 + b\,x + c$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

Remarques

- x_1 n'est pas forcément plus petit que x_2.
- Penser à la parabole et à son orientation (en fonction du signe de a) permet de retrouver ces tableaux.

Exercice XVI (tableaux de signe et inéquations)

1°) Faîtes le tableau de signe de chacune des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par les expressions de l'exercice XIV.

2°) Déduisez-en les solutions des inéquations :

a) $x^2 + 6x - 7 \geq 0$	b) $x^2 - 4x + 4 \leq 0$	c) $x^2 - 3x + 12 \geq 0$
d) $-x^2 - 8x - 14 > 0$	e) $-4x^2 + 2x - 7 > 0$	f) $5x^2 + 7x - 8 < 0$

3°) Peut-on toujours dire : « Si Δ est strictement négatif alors il n'y a pas de solution » ?

Exercice XVII (inéquations)

Résoudre les inéquations suivantes :

$$\frac{2\,x^2 + 3\,x - 2}{-3\,x^2 + 19\,x + 14} \leq 0 \qquad \frac{2\,x + 1}{x - 4} \geq x - 2$$

Exercice XVIII (source : xymaths.free.fr)

On lance une balle de tennis à la vitesse de $20\,\text{m.s}^{-1}$. La hauteur h, en mètres, atteinte par la balle en fonction du temps t, en seconde, est donnée par

$$h(t) = -5t^2 + 20t + 1{,}6\,.$$

1. Quelle est la hauteur de la balle au bout de 1 seconde ? 3 secondes ? De quelle hauteur la balle est-elle lancée ?
2. Déterminer à quel(s) instant(s) la balle atteindra une hauteur de :
   a) 1,6 mètres b) 21,6 mètres c) 12 mètres
3. Au bout de combien de temps la balle retombera au sol ?
4. Déterminer l'intervalle de temps pendant lequel la balle dépasse la hauteur de 16 m.

Exercice XIX

Une entreprise fabrique chaque jour x objets, avec $x \in [\,0\,;\,80\,]$.
Le coût de production de x objets est, en dizaine d'euros :

$$C(x) = 40 - 0{,}4x.$$

Le revenu provenant de la vente de x objets est, en dizaine d'euros :

$$R(x) = -0{,}1x^2 + 8{,}6x.$$

Le bénéfice est alors : $B(x) = R(x) - C(x)$.

1°) Donnez les trois formes (développée, factorisée, canonique) de $B(x)$.

2°) Utilisez la forme la plus appropriée pour :

a) trouver à quel moment le bénéfice est maximal ;
b) trouver à quel moment le bénéfice est égal à 1200 euros ;
c) trouver à quel moment le bénéfice est positif.