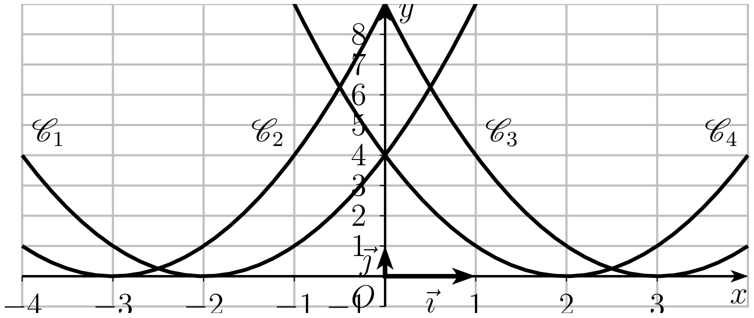
Exercices : Fonctions du second degré

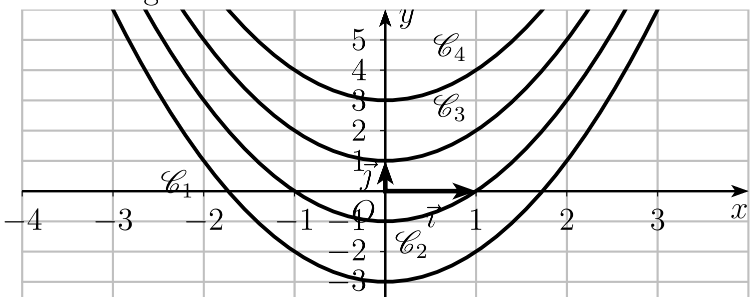
Exercice I (fonctions associées à la fonction carré)

1°) Sans calcul, associez chaque expression à la courbe correspondante.



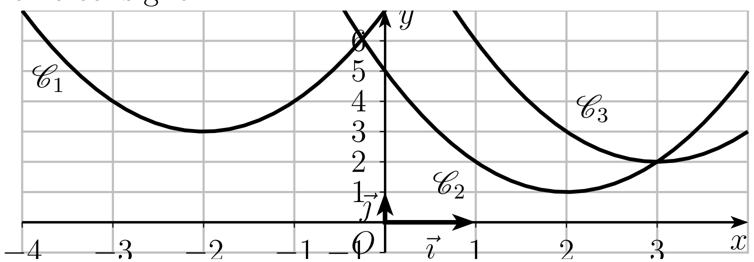
$(x-2)^2$: ...	$(x+3)^2$: ...	$(x+2)^2$: ...	$(x-3)^2$: ...

2°) Même consigne.



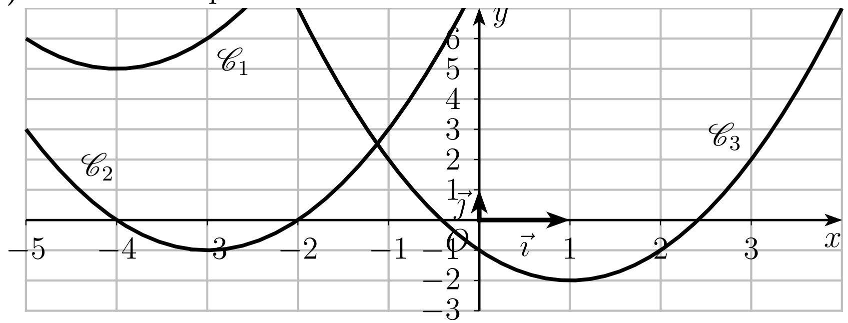
x^2+3 :	x^2-1 :	x^2-3 :	x^2+1 : .....

3°) Même consigne.



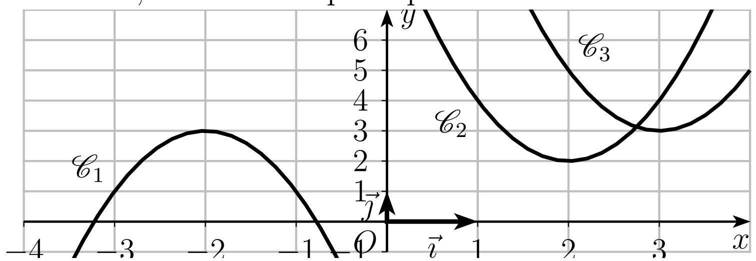
$(x-2)^2+1$:	$(x+2)^2+3$:	$(x-3)^2+2$: .....

4°) Écrivez les expressions des fonctions associées aux courbes ci-dessous.



$\mathscr{C}_1$:	$\mathscr{C}_2$:	$\mathscr{C}_3$: ....

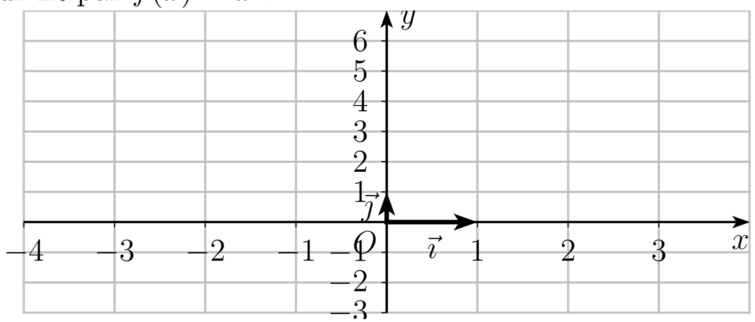
5°) Sans calcul, associez chaque expression à la courbe correspondante.



$2(x-3)^2+3$:	$-2(x+2)^2+3$: ..	$2(x-2)^2+2$: ....

Exercice II (fonctions associées à la fonction carré)

1°) Tracez, sur le graphique ci-dessous, la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$.



2°) Sans calcul, tracez les courbes des fonctions suivantes :

a) $f_1(x) = x^2 + 4$ | b) $f_2(x) = (x-1)^2$ | c) $f_3(x) = (x+3)^2 + 2$

3°) Tracez les courbes des fonctions suivantes :

a) $f_4(x) = -x^2 + 3$ | b) $f_5(x) = 2(x+2)^2 - 1$ | c) $f_6(x) = 4 - x^2/2$

4°) Conjecturez les coordonnées du sommet de la parabole pour toutes les fonctions de cet exercice.

Exercice III (fonctions polynômes du second degré)

Les fonctions suivantes sont-elles des fonctions polynômes du second degré ?

a) $f_1(x) = x^2 + 3x$	b) $f_2(x) = (x-1)^2$	c) $f_3(x) = 5x - 2$
d) $f_4(x) = 3 - 1/x$	e) $f_5(x) = (x+2)^2 - x^2$	f) $f_6(x) = 2x^3 + 6x - 1$

Exercice IV (forme canonique)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5x^2 - 40x - 88$.

1°) Prouvez que, pour tout x réel, on a : $f(x) = -5(x+4)^2 - 8$ (ceci est la forme canonique de $f(x)$).

2°) Conjecturez les coordonnées du sommet de la parabole représentant la fonction f.

Exercice V (obtention de la forme canonique)

Pour rappel, nous utilisons la formule $\boxed{x^2 + 2ax = (x+a)^2 - a^2}$ qui n'est qu'une ré-écriture de l'identité remarquable : $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$.

1°) Appliquez cette formule aux expressions suivantes :

a) $x^2 + 6x$	b) $x^2 - 4x$	c) $x^2 - 3x$
d) $x^2 + 8x - 1$	e) $2x^2 + 10x$	f) $3x^2 - 5x$

2°) Calculez la forme canonique des expressions suivantes :

a) $x^2 + 6x - 7$	b) $x^2 - 4x + 4$	c) $x^2 - 3x + 12$
d) $-x^2 - 8x - 14$	e) $-4x^2 + 2x - 7$	f) $5x^2 + 7x - 8$

Exercice VI (variations et courbes)

1°) Donnez le tableau de variations des fonctions f et g définies par $f(x) = -5(x-7)^2 + 13$ et $g(x) = 3x^2 + 6x - 4$.

2°) Les expressions du 2°) de l'exercice V sont associées à des paraboles. Donnez l'axe de symétrie et les coordonnées du sommet pour chacune d'entre elles.

3°) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 6x + 7$.

a) Trouver deux nombres a et b tels que $g(x) = (x-a)^2 + b$.

b) En déduire les variations de g.

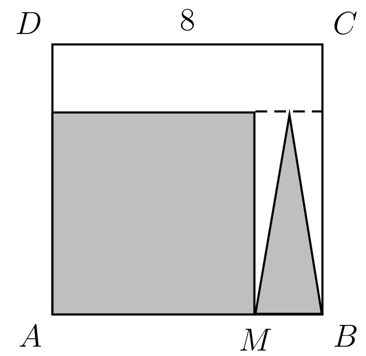
Exercice VII

Soit $ABCD$ un carré de côté 8. On place sur le segment $[AB]$ un point M (mobile) et on construit, à l'intérieur du carré $ABCD$:

– un petit carré ;

– un triangle

de la façon décrite sur la figure ci-contre. On obtient ainsi un logo formé du petit carré et du triangle.



Répondre aux deux questions :

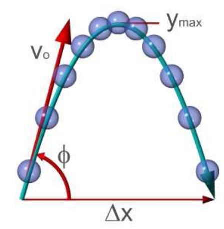
— pour quelle position de M l'aire du triangle est-elle maximale ?

— pour quelle position de M l'aire du logo est-elle égale à 30 ?

Exercice VIII

La trajectoire d'une balle (ou d'un ballon de football ou...) est (si on néglige certaines forces...) la courbe d'une fonction f dont l'expression s'écrit :

$$f(x) = -\frac{1}{2}\frac{g}{V_0^2}x^2[1 + (\tan(\phi))^2] + x.\tan(\phi) + h$$



où : $g = 9,8$; V_0 est la vitesse initiale (en m/s) ; ϕ est l'angle que fait la frappe avec l'horizontale et h est la hauteur initiale.

Nous supposons dans cet exercice qu'une balle de tennis a été frappée au niveau de la ligne du fond du court, droit devant, à une hauteur à 1 mètre de hauteur, une vitesse de 16 m/s et avec un angle de 45°. Un court de tennis fait 23,77 mètres de longueur.

1°) Vérifiez que, pour ces valeurs, l'expression de $f(x)$ devient, en arrondissant les coefficients :

$$f(x) = -0,038x^2 + x + 1.$$

2°) Conjecturez :

a) la hauteur maximale de la balle et la distance au sol correspondante ;

b) en quel point la balle va retomber au sol.

3°) a) Calculez la forme canonique (arrondissez les coefficients à 10^{-3}).

b) Que peut-on en déduire ?

c) Utilisez cette forme canonique pour résoudre l'équation $f(x) = 0$. Interprétez le résultat par une phrase.

Exercice IX (passage de la forme canonique à la forme factorisée)

Donnez la forme factorisée, quand elle existe, de chacune des expressions du 2°) de l'exercice V.

Vérifiez vos réponses en redéveloppant (mentalement ou sur papier).

Exercice X (forme factorisée)

Par calcul mental, associez chaque expression à sa forme factorisée :

F.D.	$2x^2+4x-6$	$3x^2-6x-9$	$2x^2-4x-6$	$3x^2+6x-9$
F.F.	$3(x-1)(x+3)$	$2(x-1)(x+3)$	$3(x+1)(x-3)$	$2(x+1)(x-3)$

Exercice XI (équation $f(x) = 0$)

1°) Déterminez pour quelles valeurs de x chacune des expressions du 2°) de l'exercice V s'annule.

2°) Vérifiez en traçant les courbes des fonctions sur calculatrice.