

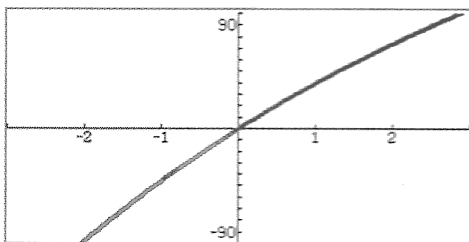
## Exercices : Dérivation et applications

### Exercice 1 (source : manuel Hyperbole)

$h$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$h(x) = \frac{1}{9}x^3 - 3x^2 + \frac{128}{3}x$$

Chloé a tracé la courbe représentative de la fonction  $h$  à l'écran de sa calculatrice (*fenêtre* :  $-3 \leq X \leq 3$ , pas 1 et  $-100 \leq Y \leq 100$ , pas 10).



Elle affirme : « La fonction  $h$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ . »

- Déterminer  $h'(x)$  et étudier son signe.
- Chloé a-t-elle raison ? Justifier.

### Exercice 2 (source : manuel Hyperbole)

$f$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 1$$

- Déterminer  $f'(x)$  et étudier son signe.
- Dresser le tableau de variations de  $f$ .
- En déduire les extremums locaux de  $f$ .

### Exercice 3 (source : manuel Hyperbole)



$g$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = \frac{2x}{x^2 + 4}$$

- Afficher la courbe représentative de la fonction  $g$  à l'écran de la calculatrice et conjecturer les extremums locaux de  $g$ .
- Démontrer les conjectures précédentes.

### Exercice 4 (source : manuel Hyperbole)

$g$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 3$$

- Dresser le tableau de variations de la fonction  $g$ .
- Déterminer les extremums locaux de  $g$ .
- Démontrer que pour tout nombre réel  $x \geq 2$  :

$$g(x) \geq 13$$

### Exercice 5

Comparez  $x$  et  $x^2$  :

- en utilisant les variations de la fonction  $h(x) = x^2 - x$  ;
- en résolvant directement  $x^2 > x$ .

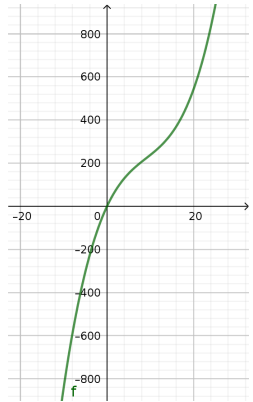
### Exercice 6

Étudiez les positions relatives de la courbe de la fonction définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  par  $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$  et de sa tangente en son point d'abscisse 2.

## Réponses

### Exercice 1

C'est vrai ( $\Delta < 0$  et  $a > 0$ )



### Exercice 2

a)  $f'(x) = 6x^2 - 6x - 36$  racines :  $-2$  et  $3$  signe de a...

b)  $f$  croissante sur  $] -\infty ; -2[$  jusqu'à  $45$  ;  
décroissante sur  $] -2 ; 3[$  jusqu'à  $-80$  ; croissante sur  $]3 ; +\infty[$ .

c)  $45$  max. local et  $-80$  min local

### Exercice 3

a)  $-1/2$  min. local et  $1/2$  max local

b)  $f'(x) = \frac{-2(x-2)(x+2)}{(x^2+4)^2}$  puis T.S.

### Exercice 4

a)  $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$  racines :  $2$  et  $4$

$f$  croissante sur  $] -\infty ; 2[$  jusqu'à  $17$

$f$  décroissante sur  $]2 ; 4[$  jusqu'à  $13$  puis croissante sur  $]4 ; +\infty[$

b)  $17$  max. local et  $13$  min local

c) Sur  $]2 ; 4[$  :  $f$  est décroissante donc si  $x \leq 4$  alors  $f(x) \geq f(4) = 13$

Sur  $]4 ; +\infty[$  :  $f$  est croissante donc si  $x \geq 4$  alors  $f(x) \geq f(4) = 13$ .

### Exercice 5

a) T.V. + racines de  $h(x)$

b) T.S.

### Exercice 6

$f'(x) = -3/(x-1)^2$  Eq tgte :  $y = 3x - 11$

$h'(x) = (3x^2 - 6x)/(x-1)^2$

$h$  croissante sur  $] -\infty ; 0[$  jusqu'à  $-10$  puis décroissante sur  $]0 ; 1[$

$h$  décroissante sur  $]1 ; 2[$  jusqu'à  $0$  puis croissante sur  $]2 ; +\infty[$

$h$  négative sur  $] -\infty ; 1[$  et positive sur  $]1 ; +\infty[$

donc la courbe est en dessous sur  $] -\infty ; 1[$  et au dessus sur  $]1 ; +\infty[$ .