Mathématiques

DEVOIR MAISON N°14

POUR MARDI 8 – 6 – 2021 PG1

Exercice I

1°) Calculez $1+4+4^2+4^3+4^4+\cdots+4^{11}$.

2°) Calculez $1+2+3+4+5+\cdots+446$.

3°) Calculez $1+3+9+27+81+\cdots+531441$.

4°) Calculez $1+3+5+7+9+\cdots+227$.

Indication pour les deux dernières questions : appelons u_n le dernier terme. Calculez la valeur de n d'abord.

Exercice II

Étudiez les variations des suites définies dans ce qui suit :

1°) $u_n = -n^2 + 12\,n - 26$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

2°) $v_{n+1} = v_n - 3\,n + 6$ pour $n \in \mathbb{N}$

3°) $w_n = \dfrac{3^n}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

4°) $t_n = n^3 - 5\,n^2 - 8\,n + 3$ pour $n \in \mathbb{N}$

Indication : pensez à varier les stratégies (nous en avons vus trois en classe).

Exercice III

Il existe de nombreux modèles mathématiques permettant d'étudier la croissance d'une population. Le terme population est utilisé ici au sens le plus large : il peut s'agir d'une population d'humains, d'animaux, de plantes, de personnes infectées par un virus, etc.

Dans cet exercice on traitera du modèle le plus simple : le modèle de Malthus. On considère que les ressources de la population étudiée sont illimitées. On fait alors l'hypothèse que l'accroissement de la population d'une année à l'autre est proportionnel à l'effectif de cette population.

Partie A : Le modèle discret

Pour tout entier naturel n, on appelle P_n l'effectif de la population à l'année n, la population initiale étant bien sûr P_0. D'après l'hypothèse sur l'accroissement de la population, il existe un réel k, dépendant des taux de mortalité et de natalité tel que, pour tout entier naturel n : $P_{n+1} - P_n = kP_n$.

1°) a) Justifiez que la suite (P_n) ainsi définie est géométrique.

b) En déduire l'expression de P_n en fonction de n, de k et de la population initiale P_0.

2°) On suppose dans cette question que la population initiale est de 1 000 individus et que la raison de la suite est 0,9.

a) Déterminez la population au bout de 10 ans.

b) L'algorithme ci-contre a pour but de déterminer le nombre d'années nécessaires pour que la population soit divisée par deux.

$p \leftarrow$ . . . .
$n \leftarrow$ . . . .
Tant que p . . . . **faire**
  $p \leftarrow$ . . . .
  $n \leftarrow$ . . . .
fin
afficher n

i) Recopiez et complétez cet algorithme.

ii) Recopiez et complétez le tableau ci-dessous.

Variables	Initialisation	Dans la boucle Tant que					
p							
n							

iii) Déduisez-en la réponse à la question posée.

iv) Donnez la traduction de cet algorithme en langage Python puis exécutez-le pour vérifier votre réponse.
(vous pouvez utiliser Thonny ou une des zones de saisie de code de la page de mon site consacrée aux listes)

c) Complétez le script Python suivant, qui doit constituer la liste des populations P_0, P_1, …, P_{10} (conseil : testez-le) :

```
liste_populations = []
for i in ................................ :
    liste_populations...............................
print(liste_populations)
```

d) Complétez le script Python suivant, qui vient à la suite du précédent et doit calculer la moyenne des populations de la liste (même conseil) :

```
somme = 0
for ........ in ............................ :
    somme = somme + ............................
print(............................)
```

Partie B : Le modèle continu

On appelle désormais $P(t)$ l'effectif de la population à l'instant $t \in [0 ; +\infty[$.
On suppose que la fonction P est dérivable et positive sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
L'hypothèse sur l'accroissement de la population se traduit ici par : il existe un réel k tel que : pour tout $t \in [0 ; +\infty[$, $P'(t) = kP(t)$.

1°) Montrez que la fonction $t \mapsto P_0\,\mathrm{e}^{kt}$ répond au problème.
Dans la suite, la fonction P est définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $P(t) = P_0\,\mathrm{e}^{kt}$.

2°) Quel est le sens de variation de P suivant les valeurs de k ?

3°) On se place dans le cas où $k = -0,1$ et d'une population initiale de 1 000 individus.

a) Calculez la population au bout de 10 ans et comparer cette valeur au modèle discret.

b) Á l'aide d'une méthode quelconque que vous expliquerez, déterminez le temps nécessaire pour que la population initiale soit divisée par 2.