Exercice I

Exercice II

$x = 1$ ou $x = 4$

Exercice III

Exercice IV

$X = \dfrac{1}{2}$ ou $X = -\dfrac{3}{2}$ donc $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
$x = \pm 2$ ou $x = \pm 3$ pour la seconde.

Exercice V

Exercice VI

$t_1 = 6{,}5$ et $v_1 = 30$; $t_2 = 7{,}5$ et $v_2 = 26$.

Exercice VII

1°) 5 et 17 pour le premier ; pas de solution pour le second.
2°) $5 \pm \sqrt{13}$.

Exercice VIII

Cet exercice est une application de la recherche de deux nombres connaissant leur somme S et leur produit P. Ils sont solutions de l'équation : $x^2 - Sx + P = 0$
On est conduit à l'équation du second degré : $x^2 - 1250x + 360000 = 0$
On a $\sqrt{\Delta} = 350$, d'où : $x = 450$ ou $x = 800$.

Exercice IX

$\left\{x = -3, x = \frac{-\sqrt{33}-5}{4}, x = \frac{\sqrt{33}-5}{4}\right\}$

Exercice X

Exercice XI

Exercice XII

1°) $\Delta = m(5m + 8)$ etc.
2°) $\Delta = 5m^2 - 12m + 4 = (m - 2)(5m - 2)$ etc.

Exercice XIII

Exercice XIV

1°) Dans chaque question, j'appelle f la fonction correspondant à l'expression.

a) $a = 1 > 0$ donc la fonction a un minimum, atteint pour $x = -\dfrac{b}{2a} = -3$ et égal à $f(-3) = (-3)^2 + 6(-3) - 7 = -16$.

b) $a = 1 > 0$ donc la fonction a un minimum, atteint pour $x = -\dfrac{b}{2a} = 2$ et égal à $f(2) = 0$.

c) $a = 1 > 0$ donc la fonction a un minimum, atteint pour $x = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{3}{2}$ et égal à $f(3/2) = 39/4$.

d) $a = -1 < 0$ donc la fonction a un maximum, atteint pour $x = -\dfrac{b}{2a} = -4$ et égal à $f(-4) = 2$.

e) $a = -4 < 0$ donc la fonction a un maximum, atteint pour $x = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{1}{4}$ et égal à $f(1/4) = -27/4$.

f) $a = 5 > 0$ donc la fonction a un minimum, atteint pour $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{7}{10}$ et égal à $f(-7/10) = -209/20$.

2°) Les variations sont données à chaque fois par le signe de a.

a)

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	-16	$\nearrow$	$+\infty$

b)

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

c)

x	$-\infty$		$3/2$		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$39/4$	$\nearrow$	$+\infty$

d)

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

e)

x	$-\infty$		$1/4$		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$-27/4$	$\searrow$	$-\infty$

f)

x	$-\infty$		$-7/10$		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$-209/20$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice XV

1°) $AC = 10$ (Pythagore).

2°) a) On applique le théorème de Thalès : $\dfrac{CM}{CA} = \dfrac{CK}{CB} = \dfrac{KM}{BA}$ donc $\dfrac{2}{10} = \dfrac{CK}{8} = \dfrac{KM}{6}$ d'où $CK = 1{,}6$ et $KM = 1{,}2$. On en déduit que l'aire du rectangle est : $KM \times KB = 1{,}2 \times (8 - 1{,}6) = 7{,}68$.

b) Même raisonnement en posant $CM = x$. $\dfrac{CM}{CA} = \dfrac{CK}{CB} = \dfrac{KM}{BC}$ donc $\dfrac{x}{10} = \dfrac{CK}{8} = \dfrac{KM}{6}$ d'où $CK = \dfrac{4}{5}x$ et $KM = \dfrac{3}{5}x$.

On en déduit que l'aire du rectangle est : $KM \times KB = \dfrac{3}{5}x \times \left(8 - \dfrac{4}{5}x\right) = -\dfrac{12}{25}x^2 + \dfrac{24}{5}x$.

Cette fonction est croissante quand x varie de 0 à $-\dfrac{b}{2a} = 5$ puis décroissante quand x varie de 5 à 10 (car $a < 0$).

Exercice XVI

Exercice XVII

1°) de -oO à -2 ; de -2/3 à 1/2 et de 7 à +oO

2°) de -oO à 1 et de 4 à 7

Exercice XVIII

1°) La hauteur de la balle au bout de 1 seconde est :
$h(1) = -5 \times 1^2 + 20 \times 1 + 1{,}6 = 16{,}6$ mètres.
Au bout de 3 secondes, la hauteur est :
$h(3) = -5 \times 3^2 + 20 \times 3 + 1{,}6 = 16{,}6$ mètres.
La hauteur initiale de la balle est :
$h(0) = -5 \times 0^2 + 20 \times 0 + 1{,}6 = 1{,}6$ mètres.

2°) a) $h(t) = 1{,}6 \iff -5\,t^2+20\,t+1{,}6 = 1{,}6 \iff -5\,t^2+20\,t = 0 \iff -5\,t(t-4) = 0 \iff -5\,t = 0$ ou $t-4=0 \iff t=0$ ou $t=4$.
La balle est donc à 1,6 mètres de hauteur au moment de la frappe et 4 secondes plus tard.

b) $h(t) = 21{,}6 \iff -5\,t^2 + 20\,t + 1{,}6 = 21{,}6 \iff -5\,t^2 + 20\,t - 20 = 0 \iff t^2 - 4\,t + 4 = 0 \iff (t-2)^2 = 0 \iff t-2 = 0 \iff t = 2$ (vous pouviez aussi utiliser le discriminant ici).
La balle est donc à 21,6 mètres de hauteur 2 secondes après la frappe.

c) $h(t) = 12 \iff -5\,t^2+20\,t+1{,}6 = 12 \iff -5\,t^2+20\,t-10{,}4 = 0$.
Le discriminant est : $\Delta = 20^2 - 4 \times (-5) \times (-10{,}4) = 192$
donc l'équation a deux racines réelles :

$$t_1 = \frac{-20-\sqrt{192}}{-10} = \frac{10+4\sqrt{3}}{5} \simeq 3{,}39$$

et $t_2 = \dfrac{-20+\sqrt{192}}{-10} = \dfrac{10-4\sqrt{3}}{5} \simeq 0{,}61$ donc la balle est donc à 12 mètres de hauteur après environ 0,61 seconde et 3,39 secondes.

3°) La balle retombera au sol quand $h(t) = 0$ or :
$h(t) = 0 \iff -5\,t^2 + 20\,t + 1{,}6 = 0$.
Le discriminant est : $\Delta = 20^2 - 4 \times (-5) \times 1{,}6 = 432$
donc l'équation a deux racines réelles :

$$t_1 = \frac{-20-\sqrt{432}}{-10} = \frac{10+6\sqrt{3}}{5} \simeq 4{,}08 \text{ et}$$

$t_2 = \dfrac{-20+\sqrt{432}}{-10} = \dfrac{10-6\sqrt{3}}{5} \simeq -0{,}08$ donc la balle retombera au sol après environ 4,08 secondes (la seconde solution ne correspond à rien de réel ici).

4°) $h(t) > 16 \iff -5\,t^2 + 20\,t + 1{,}6 > 16 \iff -5\,t^2 + 20\,t - 14{,}4 > 0$.
Ceci est une inéquation du second degré, je calcule le discriminant :
$\Delta = 20^2 - 4 \times (-5) \times (-14{,}4) = 112$
donc il y a deux racines réelles :

$$t_1 = \frac{-20-\sqrt{112}}{-10} = \frac{10+2\sqrt{7}}{5} \simeq 3{,}06 \text{ et}$$

$$t_2 = \frac{-20+\sqrt{112}}{-10} = \frac{10-2\sqrt{7}}{5} \simeq 0{,}94.$$

L'expression $-5\,t^2+20\,t-14{,}4$ a le signe de $a = -5$ donc est négative sauf entre les racines :

t	0		t_2		t_1		$+\infty$
$-5\,t^2 + 20\,t - 14{,}4$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $-5\,t^2+20\,t-14{,}4 > 0$ sur $\left]\,t_2\,;\,t_1\,\right[$: la balle dépasse la hauteur de 16 m entre 0,94 s et 3,06 s environ.

Exercice XIX

1°)

$$\begin{aligned} B(x) &= R(x) - C(x) = (-0{,}1x^2 + 8{,}6x) - (40 - 0{,}4x) \\ &= -0{,}1x^2 + 8{,}6x - 40 + 0{,}4x = \boxed{-0{,}1x^2 + 9x - 40}. \end{aligned}$$

Pour la forme factorisée éventuelle, je cherche les racines :
$\Delta = 9^2 - 4 \times (-0{,}1) \times (-40) = 65$
donc il y a deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-9-\sqrt{65}}{-0{,}2} = 45 + 5\sqrt{65} \text{ et}$$

$$x_2 = \frac{-9+\sqrt{65}}{-0{,}2} = 45 - 5\sqrt{65}.$$

$B(x)$ se factorise donc en $\boxed{-0{,}1\left(x - 45 - 5\sqrt{65}\right)\left(x - 45 + 5\sqrt{65}\right)}$.

Enfin, pour trouver la forme canonique, il nous faut calculer $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = 45$ et $\beta = B(\alpha) = -0{,}1 \times 45^2 + 9 \times 45 - 40 = 162{,}5$ donc $B(x)$ a pour forme canonique $\boxed{-0{,}1(x-45)^2 + 162{,}5}$.

2°) a) Remarquons d'abord que dans $B(x) = -0{,}1x^2 + 9x - 40$, la valeur de a est $-0{,}1$ donc $a < 0$: la fonction B est d'abord croissante puis décroissante et admet donc un maximum.
La forme canonique : $B(x) = -0{,}1(x-45)^2 + 162{,}5$ nous montre

que B atteint son maximum quand $x = 45$ et ce maximum est $\boxed{1625 \text{ euros}}$.

b) Le plus simple est d'utiliser la forme canonique (x n'y apparaît qu'une fois donc est plus simple à isoler) :
$B(x) = 120 \iff -0{,}1(x-45)^2 + 162{,}5 = 120$
$\iff -0{,}1(x-45)^2 = -42{,}5 \iff (x-45)^2 = 425$
$\iff x - 45 = \pm\sqrt{425} \iff x = 45 \pm \sqrt{425}$. Donc le bénéfice est à peu près égal à 1200 pour une fabrication d'environ $\boxed{24 \text{ objets ou } 66 \text{ objets}}$.

c) Pour l'obtention du signe de $B(x)$, la forme factorisée est recommandée ou remarquez directement que $B(x)$ a le signe du coefficient $a = -0{,}1$ sauf entre les racines :

x	0		$45-5\sqrt{65}$		$45+5\sqrt{65}$		80
$B(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

donc $B(x) > 0$ sur $\left]45-5\sqrt{65}\,;\,45+5\sqrt{65}\right[$: l'entreprise est en bénéfice lorsqu'elle fabrique entre $45-5\sqrt{65} \simeq 4{,}68$ et $45+5\sqrt{65} \simeq 85{,}31$ donc $\boxed{\text{entre } 5 \text{ et } 85 \text{ objets}}$.