Corrigé du Devoir surveillé n°7

Exercice I

Pour étudier les variations d'une fonction, nous pouvons étudier le signe de la dérivée.

Barème

1) 2,5pts

2) 3pts

3) 2,5pts

1°) $f'(t) = -2 \times (2t) + 5 \times 1 - 0 = -4t + 5$ qui est du premier degré.
Donc $f'(t) > 0 \iff -4t + 5 > 0 \iff -4t > -5 \iff t < 5/4$.

t	-1		$5/4$		6
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	-8	$\nearrow$	$17/8$	$\searrow$	-43

2°) $\dfrac{2x-3}{x+2}$ est de la forme $\dfrac{u}{v}$, qui se dérive en $\dfrac{u'v - v'u}{v^2} = \dfrac{2(x+2) - 1(2x-3)}{(x+2)^2} = \dfrac{2x+4-2x+3}{(x+2)^2} = \dfrac{7}{(x+2)^2}$.

Donc $f'(x) = \dfrac{7}{(x+2)^2}$.

Tous les termes de cette expression sont positifs (en particulier $(x+2)^2$ est un carré) donc la fonction f est strictement croissante.

x	0		5
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-3/2$	$\nearrow$	1

3°) $(-2\,x+4)^3$ est de la forme $g(ax+b)$ avec $a = -2$, $b = 4$ et $g(x) = x^3$ donc
$f'(x) = ag'(ax+b) = -2 \times (3(-2x+4)^2) = -6(-2x+4)^2$.
Remarquons que -6 est négatif et que $(-2x+4)^2$ est toujours positif (c'est un carré) donc le signe de $f'(x)$ est négatif et $f'(x)$ s'annule quand $-2x+4 = 0$:
$f'(x) = 0 \iff -2x+4 = 0 \iff x = 2$.

x	-5		2
$f'(x)$		$-$	0
$f(x)$	2744	$\searrow$	0

Exercice II

Barème

Total 12pts

1)a) 1pts

b) 1pts

2)a) 3pts

b) 1pts

3)a) 1pts

b) 2pts

c) 1pts

d) 1pts

e) 1pts

1°) a) La dérivée est positive quand la fonction est croissante ; négative quand la fonction est décroissante donc :

x	-1		$-0{,}7$		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b) La fonction est positive quand sa courbe est au dessus de l'axe des abscisses :

x	-1		$0{,}2$		$1{,}6$		2
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2°) a) Pour tout x de $[-1\,;\,2]$, on a $f'(x) = 6x^2 - 2x - 4$ qui est du second degré. Son discriminant est $\Delta = 100 > 0$ donc il y a deux racines (...) $x_1 = 1$ et $x_2 = -\dfrac{2}{3}$. D'où (signe de a sauf entre les racines) :

x	-1		$-2/3$		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$71/27$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	5

b) $71/27$ est un maximum local ; -2 est le minimum (global) et 5 est le maximum (global).

3°) a) L'équation de cette tangente s'écrit : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$.
Or $f(0) = 2(-1)^3 - (-1)^2 - 4(-1) + 1 = 1$ et
$f'(0) = 6(0)^2 - 2(0) - 4 = -4$ donc l'équation est bien $y = -4x+1$.

b) $h(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 1 - (-4x+1) = 2x^3 - x^2$.
Donc $h'(x) = 6x^2 - 2x = 2x(3x-1)$ a pour racines 0 et $1/3$ et pour signe celui de $a = 6$ sauf entre les racines donc :

x	-1		0		$1/3$		2
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	-3	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-1/27$	$\nearrow$	12

c) $h(x) = 0 \iff 2x^3 - x^2 = 0 \iff x^2(2x-1) = 0$
$\iff x = 0$ ou $x = 1/2$.

d) Des deux questions précédentes, nous déduisons le tableau de signe de h :

x	-1		0		$1/2$		2
$h(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

e) Donc :

– sur $[-1\,;\,0[\ \cup\ ]0\,;\,1/2[$, nous savons (cf. d)) que $h(x) < 0$ donc $f(x) - t(x) < 0$ d'où $f(x) < t(x)$ donc la courbe de f est en dessous de sa tangente ;

– sur $]1/2\,;\,2]$, nous avons $h(x) > 0$ donc $f(x) - t(x) > 0$ d'où $f(x) > t(x)$ donc la courbe de f est au dessus de sa tangente ;

– en 0 et en 1/2, nous avons $h(x) = 0$ donc $f(x) - t(x) = 0$ d'où $f(x) = t(x)$ donc la courbe de f touche sa tangente.