Corrigé du Devoir surveillé n°5

Exercice I

Barème

1) 2pts

2) 1pts

1°) $f(x) = y$ donc $\boxed{f(0)=0}$ car la courbe passe par le point de coordonnées $(0\,;\,0)$.
$f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 0 donc $f'(0) = \dfrac{-6}{2} = \boxed{-3}$. De même, $\boxed{f(4)=-5}$ et $\boxed{f'(4)=\dfrac{7}{3}}$.

2°) L'équation de cette tangente est $y = f'(4)(x-4) + f(4) = \dfrac{7}{3}(x-4) - 5$ donc $\boxed{y = \dfrac{7}{3}x - \dfrac{43}{3}}$.

Exercice II

Barème

1) 2pts

2) 1,5pts

3) 0,5pts

1°) $f(-1) = (-1)^2 + 3 = 4$ donc

$$t(h) = \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \frac{((-1+h)^2+3)-4}{h} = \frac{1-2\,h+h^2+3-4}{h} = \frac{-\,2\,h+h^2}{h} = \boxed{-2+h}.$$

2°) Quand h s'approche de 0, $t(h)$ se rapproche d'un nombre, à savoir -2, donc f est dérivable en -1 et $\boxed{f'(-1)=-2}$.

3°) Le nombre dérivé $f'(-1) = \boxed{-2}$ est la pente de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A.

Exercice III

Barème

1) 5x1pts

2) 2pts

1°) a) $f'(x) = \boxed{30\,x^{29}}$.

b) $g'(t) = 5 \times 1 - 0 = \boxed{5}$.

c) $h'(x) = 8 \times 3\,x^2 - 4 \times 2\,x + 5 \times 1 - 0 = \boxed{24\,x^2 - 8\,x + 5}$.

d) $\dfrac{5}{x} = 5 \times \dfrac{1}{x}$ donc $i'(x) = \boxed{-\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{5}{x^2}}$.

e) $j(x) = \dfrac{3\,x}{4\,x} - \dfrac{1}{4\,x} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{x}$ donc $j'(x) = -\dfrac{1}{4} \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \boxed{\dfrac{1}{4\,x^2}}$.

2°) L'équation de cette tangente est $y = h'(-2)(x-(-2)) + h(-2)$. Or :
$h(-2) = 8 \times (-2)^3 - 4 \times (-2)^2 + 5 \times (-2) - 3 = -64 - 16 - 10 - 3 = -93$
$h'(-2) = 24 \times (-2)^2 - 8 \times (-2) + 5 = 96 + 16 + 5 = 117$ donc l'équation s'écrit
$y = 117(x+2) - 93 = 117\,x + 234 - 93$ d'où $\boxed{y = 117\,x + 141}$.

Exercice IV

Voir le cours...

Exercice V

Barème

1) 1,5pts

2) 1pts

3) 0,5pts

1°) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ donc

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= (a^2+2ab+b^2) \times (a^2+2ab+b^2)\\ &= a^4 + 2a^3b + a^2b^2 + 2a^3b + 4a^2b^2 + 2ab^3 + b^2a^2 + 2ab^3 + b^4\\ &= \boxed{a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4}.\end{aligned}$$

2°)

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^4 - a^4}{h} = \frac{a^4 + 4a^3h + 6a^2h^2 + 4ah^3 + h^4 - a^4}{h}\\ &= \frac{4a^3h + 6a^2h^2 + 4ah^3 + h^4}{h} = \boxed{4a^3 + 6a^2h + 4ah^2 + h^3}.\end{aligned}$$

3°) Quand h s'approche de 0, le taux de variation se rapproche de $4a^3 + 6a^2 \times 0 + 4a \times 0^2 + 0^3$ donc de $4a^3$.
La fonction f est donc dérivable en tout a et sa fonction dérivée est définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{f'(x) = 4\,x^3}$.