Corrigé du Devoir surveillé n°3

Exercice I

1°) Il suffit de se souvenir que π radians représentent 180°.
Donc $\dfrac{10\pi}{3}$ rad $= 10 \times \dfrac{\pi}{3} = 10 \times 60 = 600°$.

2°) Comme π radians représentent 180°, un produit en croix donne $\dfrac{4725 \times \pi}{180} = \dfrac{105\pi}{4}$ radians.

Exercice II

1°) $\alpha_1 = -\dfrac{\pi}{6}$: angle au centre de $180 \div 6 = 30°$ en partant dans le sens négatif.

$\alpha_2 = -213\pi$: un nombre impair de demi-tours donc on arrive en $I'\ (-1\,;\,0)$.

$\alpha_3 = \pi + \dfrac{4\pi}{3}$: c'est le symétrique par rapport à O du point associé à $\dfrac{\pi}{3}$.

$\alpha_4 = -\dfrac{8\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2} = -4\pi - \dfrac{\pi}{2}$: le point image est « J' ».

$\alpha_5 = \dfrac{48\pi}{6} - \dfrac{\pi}{6} = 8\pi - \dfrac{\pi}{6}$ ce qui revient à $-\dfrac{\pi}{6}$: c'est le point M_1.

$\alpha_6 = \dfrac{44\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2} = 22\pi - \dfrac{\pi}{2}$ ce qui revient à $-\dfrac{\pi}{2}$: le point image est $J'\ (0\,;\,-1)$.

Pour $\alpha_7 = 4$, avec un tableau de proportionnalité on trouve un angle au centre de $\dfrac{4 \times 180}{\pi} \simeq 229{,}2 = 180 + 49{,}2°$, dans le sens positif.

2°) $\dfrac{2021\pi}{4} - \left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{2021\pi}{4} + \dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{2024\pi}{4} = 506\pi = 253 \times (2\pi)$ donc les deux réels ont le même point image.

3°) Pour un angle de la forme $\widehat{IO\ldots}$, le cosinus se lit sur l'axe des abscisses et le sinus sur l'axe des ordonnées :

a) $\sin \widehat{IOP} \simeq 0{,}9$

b) $\cos \widehat{IOQ} \simeq -0{,}7$

c) $\sin \widehat{IOR} \simeq -0{,}4$

d) $\cos \alpha_5 = \cos\left(\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

e) $\sin \alpha_6 = \sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$.

Exercice III

Voir le cours.

Exercice IV

1°) Si $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$ alors $\sin x \geq 0$: vrai car le point image est sur la partie supérieure gauche du cercle et son ordonnée est alors positive.

2°) Si $x \in [\,0\,;\,\pi\,]$ alors $\cos x \geq 0$: faux car $\cos x \leq 0$ sur $\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$.

3°) Si $x \leq 0$ alors $\sin x \leq 0$: faux, par exemple $\sin\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right) = 1 \geq 0$.

4°) Si $\cos x \leq 0$ alors $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$: faux, x pourrait être dans l'intervalle $\left[3\pi\,;\,\dfrac{7\pi}{2}\right]$ ou ….

Exercice V

1°) a) $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$ donc $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

b) $\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ donc $x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ où $x = \pi - \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

2°) a) Pour tout x réel, $(2-x)(2x+1) = 4x + 2 - 2x^2 - x = -2x^2 + 3x + 2 = P(x)$.

b) $-2\cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0 \iff (2 - \cos x)(2\cos x + 1) = 0$
$\iff 2 - \cos x = 0$ ou $2\cos x + 1 = 0 \iff \cos x = 2$ ou $\cos x = -\dfrac{1}{2}$.
La première équation n'a pas de solution car -1 6 $\cos x$ 6 1 pour tout réel x.
La seconde a pour solutions : $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice VI

1°) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donc

$\sin x = \pm\sqrt{1 - \cos^2 x} = \pm\sqrt{1 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^2} = \pm\sqrt{\dfrac{25}{25} - \dfrac{9}{25}} = \pm\sqrt{\dfrac{16}{25}} = \pm\dfrac{4}{5}$.

Enfin, comme $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,0\right]$, on a $\sin x \leq 0$ donc $\sin x = -\dfrac{4}{5}$.

2°) $\sin(4\pi + x) = \sin x = -\dfrac{4}{5}$;

$\sin(\pi - x) = \sin x = -\dfrac{4}{5}$;

$\cos(-x) = \cos x = \dfrac{3}{5}$;

$\cos(\pi + x) = -\cos x = -\dfrac{3}{5}$.