Corrigé du Devoir surveillé n°1

Exercice I

1°) $u_0 = 0^2 - 17 \times 0 + 60 = 60$; $u_1 = 1^2 - 17 \times 1 + 60 = 44$;
$u_2 = 2^2 - 17 \times 2 + 60 = 30$.

2°) $u_{20} = 20^2 - 17 \times 20 + 60 = 120$;

3°) Le 50e terme est $u_{49} = 49^2 - 17 \times 49 + 60 = 1628$.

4°) $n^2 - 17\,n + 60 = (n - 8{,}5)^2 - 8{,}5^2 + 60 = (n - 8{,}5)^2 - 12{,}25$.
Donc $u_n = 0 \iff (n - 8{,}5)^2 - 12{,}25 = 0 \iff (n - 8{,}5)^2 = 12{,}25$
$\iff n - 8{,}5 = \pm\sqrt{12{,}25} = \pm\, 3{,}5 \iff n = 3{,}5 + 8{,}5 = 12$
ou $n = -3{,}5 + 8{,}5 = 5$. La suite a donc deux termes nuls : u_5 et u_{12}.

Exercice II

1°) $u_1 = \dfrac{1}{2} u_0 + 0 - 1 = \dfrac{1}{2} \times 4 - 1 = 1$; $u_2 = \dfrac{1}{2} u_1 + 1 - 1 = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$;
$u_3 = \dfrac{1}{2} u_2 + 2 - 1 = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{1}{4} + 1 = \dfrac{5}{4} = 1{,}25$.

2°) Pour calculer les termes de u_1 à u_{60}, il faut faire varier n de 0 à 59 (car $u_{60} = \dfrac{1}{2} u_{59} + 59 - 1$) donc l'algorithme suivant convient :

$u \leftarrow 4$
Pour $n \leftarrow 0$ **à** 59 **faire**
| $u \leftarrow u/2 + n - 1$
fin
afficher u

Exercice III

1°) $2x - 7 = 3x + 1 \iff 2x - 3x = 1 + 7 \iff -x = 8 \iff x = -8$.
L'ensemble des solutions est donc $\boxed{S = \{-8\}}$.

2°) Pour qu'une fraction soit nulle, il faut que le numérateur soit nul mais pas le dénominateur. Donc :

$$\frac{(2x-1)(x+2)}{(x+3)(x-2)(5x+6)} = 0$$
$\iff (2x-1)(x+2) = 0$ et $(x+3)(x-2)(5x+6) \neq 0$
$\iff 2x - 1 = 0$ ou $x + 2 = 0$ et $x + 3 \neq 0$ et $x - 2 \neq 0$ et $5x + 6 \neq 0$
$\iff x = 1/2$ ou $x = -2$ et $x \neq -3$ et $x \neq 2$ et $x \neq -6/5$

donc $\boxed{S = \left\{\dfrac{1}{2} ; -2\right\}}$.

Remarque : -3 ; 2 et $-6/5$ sont ici des valeurs interdites, elles n'auraient pas pu être des solutions.

3°)

$$\frac{1}{3} - x > x - \frac{1}{4} \iff -x - x > -\frac{1}{4} - \frac{1}{3}$$
$$\iff -2x > -\frac{3}{12} - \frac{4}{12} = -\frac{7}{12}$$
$$\iff x < -\frac{7}{12} \div (-2) = -\frac{7}{12} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{24}.$$

L'ensemble des solutions est donc $\boxed{S = \left]-\infty\,;\, \dfrac{7}{24}\right[}$.

Exercice IV

1°) Si $u_n = -3\,n^2 + 4$ alors $u_{n+1} = -3\,(n+1)^2 + 4 = -3(n^2 + 2n + 1) + 4 = -3n^2 - 6n + 1$ et $u_{n+1} - u_n = (-3n^2 - 6n + 1) - (-3n^2 + 4) = -6n - 3$.

2°) (u_n) est donc définie par récurrence par $u_0 = -3 \times 0^2 + 4 = 4$ et $u_{n+1} = u_n - 6n - 3$ pour tout entier naturel n.

Exercice V

1°) $50n + 2000 \geq 3400 \iff 50n \geq 1400 \iff n \geq 1400 \div 50 \iff n \geq 28$: ce sera dans 28 années.

2°) Utiliser le mode « suite(n) » pour la suite (u_n) et « suite(n+1) » pour la suite (v_n) (pensez à mettre nMin à 1).
On trouve $n = 10$ pour le contrat 1 ($u_9 = 2450$ et $u_{10} = 2500$) et $n = 13$ pour le contrat 2 ($v_{12} \simeq 2474{,}978$ et $v_{13} \simeq 2549{,}728$).

3°)

$u \leftarrow 2050$
$v \leftarrow 1700$
$n \leftarrow 1$
tant que $u \geq v$ **faire**
    $n \leftarrow n+1$
    $u \leftarrow 50 * n + 2000$
    $v \leftarrow 1.01 * v + 50$
fin
afficher n

(en fait, l'instruction $u \leftarrow 2050$ ne sert qu'à entrer dans la boucle).

4°) Le problème est que nous savons pas au départ si le contrat 2 va devenir plus intéressant que le contrat 1 donc l'algorithme pourrait tourner indéfiniment (boucle infinie).