Corrigé du Devoir maison n°7

Exercice I

Barème

Total 9pts

1) 1,5pts **1°)** $u_0 = -10$, $u_1 = 200 - 0.6 \times (-10) = 206$ et $u_2 = 200 - 0.6 \times (206) = 76{,}4$ donc :
$u_1 - u_0 = 216$ et $u_2 - u_1 = -129{,}6 \neq 216$ donc (u_n) n'est pas une suite arithmétique ; $u_1 \div u_0 = -20{,}6$ et $u_2 \div u_1 \simeq 0{,}37 \neq -20{,}6$ donc (u_n) n'est pas une suite géométrique.

2) 1pts **2°)** En utilisant la calculatrice en mode suite récurrente (avec u(n+1)), nous constatons que u_n semble se rapprocher de 125 quand n devient grand.

3)a) 2,5pts **3°) a)** Le but final est d'écrire v_{n+1} en fonction de v_n.

i) $v_n = 125 - u_n$ donc $\boxed{v_{n+1} = 125 - u_{n+1}}$.

ii) En remplaçant u_{n+1} par $200 - 0{,}6u_n$, nous obtenons $v_{n+1} = 125 - (200 - 0{,}6u_n)$ donc $\boxed{v_{n+1} = -75 + 0{,}6u_n}$.

iii) Puisque $v_n = 125 - u_n$, il vient $v_n + u_n = 125$ donc $u_n = 125 - v_n$.
En remplaçant u_n par $125 - v_n$ dans l'égalité du ii) :
$v_{n+1} = -75 + 0{,}6(125 - v_n) = -75 + 75 - 0{,}6v_n$ donc $\boxed{v_{n+1} = -0{,}6v_n}$.

b) 1pts **b)** $v_{n+1} = qv_n$ avec $q = -0{,}6$ donc (v_n) est une suite $\boxed{\text{géométrique}}$ de premier terme $v_0 = 125 - u_0 = 135$ et de raison $q = -0{,}6$.

c) 1pts **c)** Je déduis du b) que $v_n = q^n v_0 = \boxed{135(-0{,}6)^n}$.

d) 1pts **d)** $u_n = 125 - v_n = \boxed{125 - 135(-0{,}6)^n}$.

e) 1pts **e)** $135(-0{,}6)^{50} \simeq 10^{-9}$ donc $u_{50} = 125 - 135(-0{,}6)^{50} \simeq 124{,}999999999$; u_n semble effectivement se rapprocher de 125 quand n devient grand.

Exercice II

Barème

1) 1pts

2) 1pts

3) 1pts

Le coefficient directeur de la sécante à la courbe $\mathscr{C}_f$ passant par les points A et B est le taux de variation de f entre les deux points.

1°) $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \dfrac{f(-2) - f(3)}{-2 - 3} = \dfrac{(4 \times (-2)^2 + 1) - (4 \times 3^2 + 1)}{-5} = \dfrac{17 - 37}{-5} = \dfrac{-20}{-5} = 4$.

2°) $\dfrac{f(0) - f(1)}{0 - 1} = \dfrac{(-1/2) - (2/3)}{-1} = -\dfrac{-7}{6} = \dfrac{7}{6}$.

3°) $\dfrac{f(\pi/4) - f(\pi/2)}{(\pi/4) - (\pi/2)} = \dfrac{\cos(\pi/4) - \cos(\pi/2)}{-\pi/4} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - 0\right) \times \left(-\dfrac{4}{\pi}\right) = -\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

Exercice III

Barème

1°) (u_n) est $\boxed{\text{arithmétique}}$ de premier terme $u_0 = 10$ et raison $r = 5$ car on passe d'un terme de la suite à son suivant en ajoutant toujours 5. Total 9pts
(v_n) est $\boxed{\text{géométrique}}$ de premier terme $v_0 = 10$ et raison $q = 1{,}02$ car on passe d'un terme de la suite à son suivant en le multipliant par $1 + \frac{2}{100} = 1{,}02$. 1) 1,5pts

2°) $u_n = u_0 + nr = 10 + 5n$ d'où $u_{60} = 10 + 5 \times 60 = \boxed{310}$ g. 2) 1,5pts
$v_n = v_0 \times q^n = 10 \times 1{,}02^n$ d'où $v_{60} = 10 \times 1{,}02^{60} \simeq \boxed{32{,}81}$ g.
Le choix du mathématicien semble le plus raisonnable...

3°) a) $10 + 5n \geqslant 200 \iff n \geqslant \frac{200-10}{5} \iff n \geqslant 38$ donc dans $\boxed{38 \text{ jours}}$. 3)a) 1,5pts

b) L'inéquation est $10 \times 1{,}02^n \geqslant 200$, ce qui ne résout pas facilement (un outil sera donné en Terminale pour cela : le logarithme népérien). L'algorithme complet est ci-contre. b) 1pts

$v \leftarrow 10$
$n \leftarrow 0$
Tant Que $v < 200$ **faire**
  $v \leftarrow v \times 1{,}02$
  $n \leftarrow n + 1$
fin
Afficher n

c) 1pts **c)** Traduction en Python de cet algorithme :

```
v = 10
n = 0
while v < 200 :
    v = v * 1.02
    n = n + 1
print("Monsieur M. dépassera 200 g/jour dans ",n," jours")
```

d) 0,5pts **d)** Le programme affiche 152 donc ce sera dans $\boxed{152 \text{ jours}}$ (vérifiable avec la calculatrice en mode Suite).

4) 2pts

4°)

```
u = 15
v = 10.2
n = 1
while v < u :
    u = u + 5
    v = v * 1.02
    n = n + 1
print("Monsieur M. dépassera Madame M. dans ",n," jours")
```

Les valeurs initiales u = 15 et v = 10.2 permettent à l'algorithme de rentrer dans la boucle, ce qui ne serait pas le cas avec u = v = 10.
L'algorithme donne 243 comme réponse, la consommation quotidienne de Monsieur va dépasser celle de Madame dans $\boxed{\text{243 jours}}$.

Cette question est problématique car nous ne savions pas à priori si la consommation de Monsieur allait dépasser celle de Madame donc nous avons écrit un programme qui aurait pu ne pas s'arrêter (boucle infinie potentielle).