Corrigé du Devoir maison n°2

Exercice I

a) $3x-1=4 \iff 3x=4+1=5 \iff x=\dfrac{5}{3}$.

L'ensemble des solutions est donc $\boxed{S=\left\{\dfrac{5}{3}\right\}}$.

b) $2x-7=3x+1 \iff 2x-3x=1+7 \iff -x=8 \iff x=-8$.
L'ensemble des solutions est donc $\boxed{S=\{-8\}}$.

c)

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}-x>x-\frac{1}{4} &\iff -x-x>-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\\ &\iff -2x>-\frac{3}{12}-\frac{4}{12}=-\frac{7}{12}\\ &\iff x<-\frac{7}{12}\div(-2)=-\frac{7}{12}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{24}.\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\boxed{S=\left]-\infty\,;\,\dfrac{7}{24}\right[}$.

d) Pour qu'une fraction soit nulle, il faut que le numérateur soit nul mais pas le dénominateur. Donc :

$\dfrac{(3x-1)(x+4)}{(x+2)(x-1)(4x+5)}=0$

$\iff (3x-1)(x+4)=0$ et $(x+2)(x-1)(4x+5)\neq 0$

$\iff 3x-1=0$ ou $x+4=0$ et $x+2\neq 0$ et $x-1\neq 0$ et $4x+5\neq 0$

$\iff x=1/3$ ou $x=-4$ et $x\neq -2$ et $x\neq 1$ et $x\neq -5/4$

donc $\boxed{S=\left\{\dfrac{1}{3};-4\right\}}$.

Remarque : -2 ; 1 et $-5/4$ sont ici des valeurs interdites, elles n'auraient pas pu être des solutions.

Exercice II

1°) $u_0=2^0-3=1-3=-2$, $\quad u_1=2^1-3=2-3=-1$,
$u_3=2^3-3=8-3=5$, $\quad u_5=2^5-3=32-3=29$.

2°) a) $u_{n+1}=2^{n+1}-3$.

b) $u_{n+1}=2^{n+1}-3=2^1\times 2^n-3=2\times 2^n-6+3=2\times(2^n-3)+3=2\times u_n+3$.

Autre rédaction (un peu moins élégante) :
$2\times u_n+3=2\times(2^n-3)+3=2^{n+1}-6+3=2^{n+1}-3=u_{n+1}$.

La suite (u_n) peut donc aussi être définie pour tout entier naturel n par son premier terme $u_0=-2$ et par la relation de récurrence $u_{n+1}=2u_n+3$.

Exercice III

1°) 10 % de 40 000 font 4 000 poissons donc la population est $40\,000-4\,000+1000=\boxed{37\,000}$ poissons après un an. 10 % de 37 000 font 3 700 poissons donc la population est $37\,000-3\,700+1000=\boxed{34\,300}$ poissons après deux ans.

2°) a) $p_0=40000$ est la population initiale. Pour passer de la population p_n à la population p_{n+1} :

- je calcule 10 % de p_n donc $\dfrac{10}{100}p_n=0{,}1\,p_n$;
- je retire ces 10 % : $p_n-0{,}1\,p_n=0{,}9\,p_n$;
- j'ajoute les 1000 poissons : $0{,}9\,p_n+1000$ donc $p_{n+1}=0{,}9\,p_n+1000$.

b) $p_3=0{,}9\,p_2+1000=0{,}9\times 34300+1000=\boxed{31\,870}$

$p_4=0{,}9\,p_3+1000=0{,}9\times 31870+1000=\boxed{29683}$.

c) Il faut mettre la calculatrice en mode Suite, choisir « suite(n+1) », mettre nMin à 0 et entrer la relation de récurrence :
« u(n+1)=0.9 u(n)+1000 ».
Il ne reste plus qu'à demander un tableau de valeurs (« Table »). En demandant suffisamment de termes, on constate que la population $\boxed{\text{semble se stabiliser à 10000 poissons}}$.

d) Si l'on modifie la population initiale (par exemple 500 poissons), la suite se stabilise quand même à (environ ?) 10000 poissons.

Exercice IV

1°) 49 % de 100 élèves donc 49 élèves ont réussi leur bac.
Si un élève non bachelier a été renvoyé, alors il reste 99 élèves dont 49 ont réussi leur bac, d'où un pourcentage de $\dfrac{49}{99} \times 100 \simeq \boxed{49{,}49\ \%}$ de réussite !
On se demande si les auteurs du film ont eu leur bac ...

2°) Soit n ce nombre d'élèves passant le bac au départ. Le pourcentage de bacheliers est alors :
$\dfrac{49}{100} \times n = 0{,}49n$ au départ.
On retire un élève ayant râté le bac, il en reste $n - 1$ et toujours $0{,}49n$ bacheliers.
Le nouveau pourcentage de réussite est donc $\dfrac{0{,}49n}{n-1} \times 100 = \dfrac{49n}{n-1}$
($0{,}49n$ élèves ont réussi sur $n - 1$ élèves en tout).
Il faudrait donc que $\dfrac{49n}{n-1} \geqslant 50$. Or :
$\dfrac{49n}{n-1} \geqslant 50 \iff 49n \geqslant 50(n-1) \iff 49n \geqslant 50n - 50 \iff 50 \geqslant n$
Le raisonnement fonctionnerait avec un nombre initial d'élèves $\boxed{\text{inférieur ou égal à 50}}$.