Corrigé du Devoir maison n°12

Exercice I

1°) a) $f'(x) = -4\times 3\,x^2 + 3\times 2\,x - 2\times 1 + 0 = -12\,x^2 + 6\,x - 2$.

b) $g(x) = \dfrac{3\,x-2}{4\,x+1}$ est de la forme $\dfrac{u}{v}$, où $u = 3x-2$ et $v = 4x+1$ donc $u' = 3$ et $v' = 4$ d'où $g'(x) = \dfrac{u'v-uv'}{v^2} = \dfrac{3(4x+1)-(3x-2)4}{(4\,x+1)^2} = \dfrac{12x+3-(12x-8)}{(4\,x+1)^2} = \dfrac{11}{(4\,x+1)^2}$.

c) $-4/x = -4\times(1/x)$ donc $h'(x) = 2\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 4\times\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) + 0 = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{4}{x^2}$.

d) $i(x) = (2\,x-1)^6$ est de la forme $g(ax+b)$ où $a=2$, $b=-1$ et $g(x) = x^6$, qui se dérive en $g'(x) = 6x^5$ donc
$i'(x) = ag'(ax+b) = 2\times 6(2\,x-1)^5 = 12(2\,x-1)^5$.

e) $j(x) = x\sqrt{1-x}$ est de la forme uv ; avec $v = \sqrt{1-x}$ qui est de la forme $g(ax+b)$, où $g(x) = \sqrt{x}$ et $a = -1$.

Donc : $u = x$; $u' = 1$; $v = \sqrt{1-x}$; $v' = ag'(ax+b) = -1\times\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}$ donc

$$j'(x) = u'v+uv' = 1\sqrt{1-x} + x\times\left(-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\right) = \frac{2\sqrt{1-x}\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}} - \frac{x}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2(1-x)}{2\sqrt{1-x}} - \frac{x}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}.$$

f) $k(x) = \dfrac{1-2\,x^2}{x+\sqrt{x}-2}$ est de la forme $\dfrac{u}{v}$, où $u = 1-2x^2$ et $v = x+\sqrt{x}-2$

donc $u' = -4x$ et $v' = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ d'où

$$k'(x) = \frac{-4x(x+\sqrt{x}-2) - (1-2x^2)(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}})}{(x+\sqrt{x}-2)^2} = \frac{-2x^2 - 3x\sqrt{x} + 8x - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 1}{(x+\sqrt{x}-2)^2}.$$

2°) La fonction g est définie et dérivable en tout $x \neq -1/4$ donc
$D_g = D_{g'} = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{4}\right\} = \left]-\infty\,;\,-\dfrac{1}{4}\right[\cup \left]-\dfrac{1}{4}\,;\,+\infty\right[$.

La fonction h est définie et dérivable en tout $x > 0$ donc
$D_h = D_{h'} = \mathbb{R}^+ = \,]\,0\,;\,+\infty\,[$.
La fonction j est définie en tout x tel que $1-x \geq 0$ donc $x \leq 1$ donc $D_j = \,]-\infty\,;\,1\,]$.
La fonction j est dérivable en tout x tel que $1-x > 0$ donc $x < 1$ donc $D_{j'} = \,]-\infty\,;\,1\,[$.
La fonction k est définie en tout x tel que :
– on peut calculer $\sqrt{x}$ donc $x \geq 0$;
– il ne faut pas que $x+\sqrt{x}-2$ soit égal à 0.
Résolvons l'équation $x+\sqrt{x}-2 = 0$ en remarquant que $x = (\sqrt{x})^2$:
$x+\sqrt{x}-2 = 0 \Rightarrow (\sqrt{x})^2+\sqrt{x}-2 = 0 \Rightarrow X^2+X-2 = 0$ en posant $X = \sqrt{x}$.
Cette équation a deux solutions (calculer Δ etc.) $X_1 = 1$ et $X_2 = -2$ donc $\sqrt{x} = 1$ ou $\sqrt{x} = -2$ (impossible) d'où $x = 1^2 = 1$.
Donc 1 est une valeur interdite et $D_k = \mathbb{R}^+ - \{1\} = [\,0\,;\,1\,[\, \cup \,]\,1\,;\,+\infty\,[$.
Enfin, pour pouvoir calculer $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, il faut que $x > 0$ donc
$D_{k'} = \,]\,0\,;\,1\,[\, \cup \,]\,1\,;\,+\infty\,[$.

Exercice II

1°) a) $f(x) = x^2 - 4\,x + 3$ est la forme développée.
$\alpha = -\dfrac{b}{2a} = 2$ et $\beta = f(2) = 2^2 - 4\times 2 + 3 = -1$ donc la forme canonique est $f(x) = (x-2)^2 - 1$.
A partir de la forme canonique, je peux trouver la forme factorisée : $f(x) = (x-2)^2 - 1^2 = ((x-2)-1)((x-2)+1) = (x-3)(x-1)$.
Je pouvais aussi calculer les racines…

b) Comme $\alpha = 2$ et $\beta = -1$ et $a = 1 > 0$, le tableau de variations est :

x	-4		2		5
f	35	$\searrow$	-1	$\nearrow$	8

Il était également possible d'étudier le signe de la dérivée de f :
$f'(x) = 2x-4$ donc $f'(x) > 0 \iff 2x-4 > 0 \iff x > 2$ donc f est strictement croissante à partir de 2 seulement.

c) On applique la règle du « signe de a sauf entre les racines » 1 et 3 (où on utilise la forme factorisée $(x-3)(x-1)$) :

x	-4		1		3		5
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

d) D'après le tableau de signes, $f(x) \geq 0$ sur $S = [\,-4\,;\,1\,] \cup [\,3\,;\,5\,]$.

e) D'après le tableau de variation, f a pour minimum -1 et pour maximum 35.

2°) a) $f(x) = 3\,x^2 - 5\,x$ est la forme développée.

$\alpha = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{5}{6}$ et $\beta = f\left(\dfrac{5}{6}\right) = -\dfrac{25}{12}$ donc la forme canonique est $f(x) = 3\left(x - \dfrac{5}{6}\right)^2 - \dfrac{25}{12}$.

Forme factorisée : $f(x) = 3\,x^2 - 5\,x = 3\,x(x - 5/3)$ (donc les racines sont 0 et 5/3).

b) $\alpha = 5/6$, $\beta = 25/12$ et $a = 3 > 0$, le tableau de variations est :

x	-4		$5/6$		5
f	68	$\searrow$	$-25/12$	$\nearrow$	50

c) Les racines sont 0 et 5/3 et $a = 3 > 0$ donc :

x	-4		0		$5/3$		5
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

d) D'après le tableau de signes, $f(x) \geq 0$ sur $S = [\,-4\,;\,0\,] \cup [\,5/3\,;\,5\,]$.

e) D'après le tableau de variation, f a pour minimum $-25/12$ et pour maximum 68.

3°) a) $f(x) = 2 - 4(x+1)^2$ est la forme canonique (il n'y a qu'un seul x). Il suffit alors de développer :

$f(x) = 2 - 4(x+1)^2 = 2 - 4(x^2 + 2x + 1) = -4x^2 - 8x - 2$ est la forme développée.

On peut également trouver directement la forme factorisée :

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 - 4(x+1)^2 = (\sqrt{2})^2 - (2(x+1))^2 \\ &= (\sqrt{2} - 2(x+1))(\sqrt{2} + 2(x+1)) \\ &= (-2x + \sqrt{2} - 2)(2x + \sqrt{2} + 2) \\ &= -4(x - \sqrt{2}/2 + 1)(x + \sqrt{2}/2 + 1) \end{aligned}$$

(donc les racines sont $\sqrt{2}/2 - 1$ et $-\sqrt{2}/2 - 1$).

b) $\alpha = -1$, $\beta = 2$ et $a = -4 < 0$, le tableau de variations est :

x	-4		-1		5
f	-34	$\nearrow$	2	$\searrow$	-142

c) Les racines sont $-\sqrt{2}/2 - 1$ et $\sqrt{2}/2 - 1$ et $a = -4 < 0$ donc :

x	-4		$-\sqrt{2}/2 - 1$		$\sqrt{2}/2 - 1$		5
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

d) D'après le tableau de signes, $f(x) \geq 0$ sur $S = \left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - 1\,;\,\dfrac{\sqrt{2}}{2} - 1\right]$.

e) D'après le tableau de variation, f a pour minimum -142 et pour maximum 2.

4°) a) $f(x) = -2\,x^2 + 4\,x - 3$ est la forme développée.

$\alpha = -\dfrac{b}{2a} = 1$ et $\beta = f(1) = -1$ donc la forme canonique est $f(x) = -2\,(x-1)^2 - 1$.

Comme $(x-1)^2 \geq 0$, nous voyons que $-2\,(x-1)^2 \leq 0$ donc que $-2\,(x-1)^2 - 1 \leq -1$ donc $f(x)$ ne s'annule jamais (f n'a pas de racine) donc il n'y a pas de forme factorisée.

b) $\alpha = 1$, $\beta = -1$ et $a = -2 < 0$, le tableau de variations est :

x	-4		1		5
f	-51	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-33

c) Il n'y a pas de racine donc $f(x)$ a toujours le signe de $a = -2 < 0$:

x	-5		5
$f(x)$		$-$	

d) D'après le tableau de signes, $f(x) \geq 0$ n'a pas de solution.

e) D'après le tableau de variation, f a pour minimum -51 et pour maximum -1.

Exercice III

Augmenter de p % revient à multiplier par $1+p/100$, si nous notons q ce nombre alors la population après un an est $u_1 = 10000q - 1000$ et celle après deux ans est $u_2 = qu_1 - 1000 = q(10000q - 1000) - 1000 = 10000q^2 - 1000q - 1000$.

Après 2 ans, la population est 12000 donc $10000q^2 - 1000q - 1000 = 12000$ ou encore, en divisant par 1000, $10q^2 - q - 1 = 12$ ce qui donne $10q^2 - q - 13 = 0$.

Le discriminant est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 10 \times (-13) = 521$ donc il y a deux solutions :

$q_1 = \dfrac{1 - \sqrt{521}}{20}$ est négative donc ici impossible ; $q_2 = \dfrac{1 + \sqrt{521}}{20} \simeq 1{,}19$.

Comme $q = 1 + p/100$, nous pouvons conclure que la population de grenouilles $\boxed{\text{augmente naturellement d'environ 19 \% chaque année}}$.