Corrigé du DM5

Soient A, B, C les points images de $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{3}$.

47 p 179

Soient E, F, G les points images de $-\frac{5\pi}{6}$; $\frac{11\pi}{6}$; $\frac{13\pi}{6}$.

- $-\frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6} - \pi$ donc E est le symétrique de A par rapport à O
  donc $\cos -\frac{5\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin -\frac{5\pi}{6} = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$
- $\frac{11\pi}{6} = \frac{12\pi}{6} - \frac{\pi}{6}$ ce qui revient à $-\frac{\pi}{6}$; F est le symétrique de A par rapport à l'axe des x donc $\cos\frac{11\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
  et $\sin\frac{11\pi}{6} = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$.
- $\frac{13\pi}{6} = \frac{12\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = 2\pi + \frac{\pi}{6}$ donc G = A : $\cos\frac{13\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
  $\sin\frac{13\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

49 p 179

Soient E, F, G les points images de $\frac{9\pi}{4}$; $\frac{81\pi}{4}$ et $-\frac{145\pi}{4}$.

- $\frac{9\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{4}$ donc E = B ; $\cos\frac{9\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\frac{9\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\frac{81\pi}{4} = \frac{80\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 20\pi + \frac{\pi}{4} = 10\times 2\pi + \frac{\pi}{4}$ donc F = B ; mêmes valeurs pour cosinus et sinus.
- $-\frac{145\pi}{4} = -\frac{144\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -36\pi - \frac{\pi}{4} = -18\times 2\pi - \frac{\pi}{4}$
  donc G est le symétrique de B par rapport à l'axe des x :
  $\cos\left(-\frac{145\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(-\frac{145\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice III

1°) $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
(point P, symétrique de M par rapport à O).

$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
(point Q, symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses).

$\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = \cos\left(-\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
(point N, symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées).

$\cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (point M).

2°) Même principe qu'au 1°) :

$\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = \sin\left(-\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 4

1°)
$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \left(3\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(\cos\frac{\pi}{4} - 3\sin\frac{\pi}{4}\right)^2 \\ &= \left(3\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 3\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2 \\ &= 4\times 2 + 2 = \boxed{10}. \end{aligned}$$

2°) La courbe de f semble être une droite horizontale : f semble être une $\boxed{\text{fonction constante}}$.

3°) Pour tout réel x :
$$\begin{aligned} f(x) &= (3\cos(x) + \sin(x))^2 + (\cos(x) - 3\sin(x))^2 \\ &= 9\cos^2(x) + 6\cos(x)\sin(x) + \sin^2(x) + \cos^2(x) \\ &\quad -6\cos(x)\sin(x) + 9\sin^2(x) \\ &= 10\cos^2(x) + 10\sin^2(x) = 10(\cos^2(x) + \sin^2(x)) \\ &= 10\times 1 = 10 \end{aligned}$$
donc f est bien une fonction constante.