Repères et coordonnées dans le plan

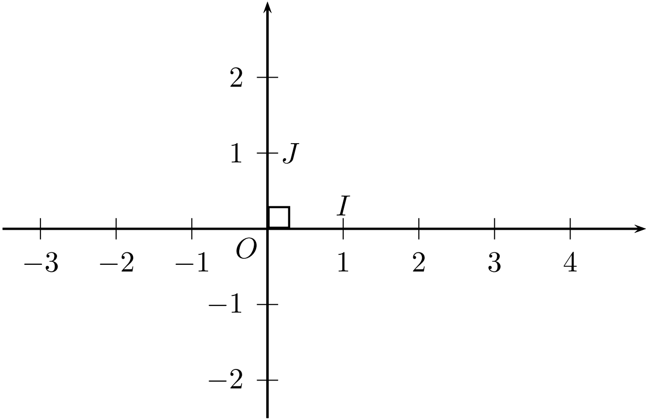
Y. Moncheaux

Octobre 2018

Table des matières

I – Repère et coordonnées (définitions)

Ⓓ $(O\,;\,I,\,J)$ est un repère orthonormé si $(OI) \perp (OJ)$ et si $OI = OJ = 1$.



Ne pas noter

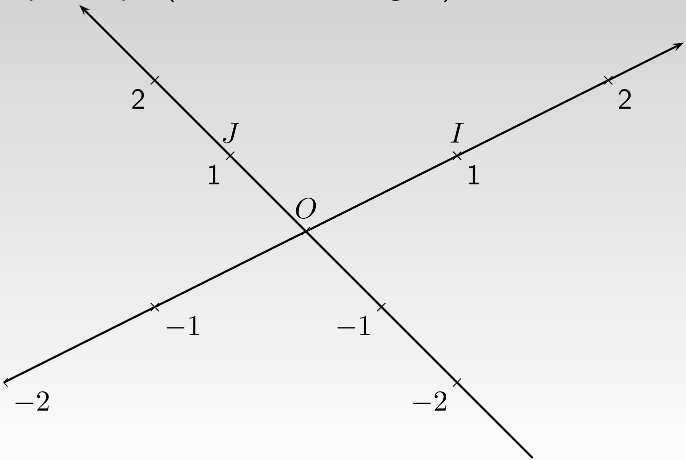
O est appelé origine de ce repère.

Ne pas noter

Il existe d'autres sortes de repères :

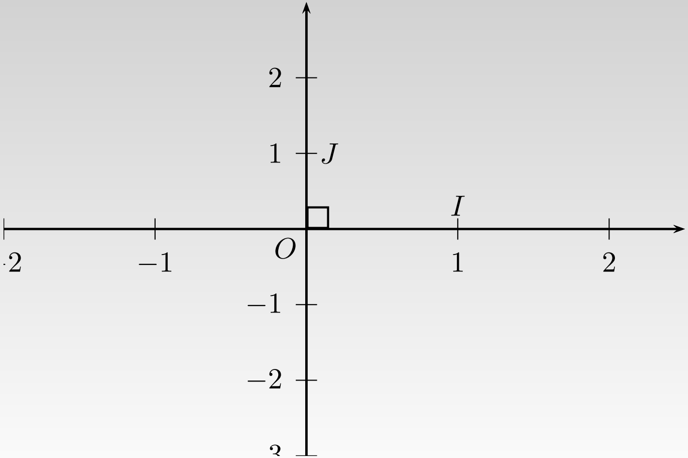
Ne pas noter

Il existe d'autres sortes de repères :
repère quelconque (si O, I, J non alignés) :



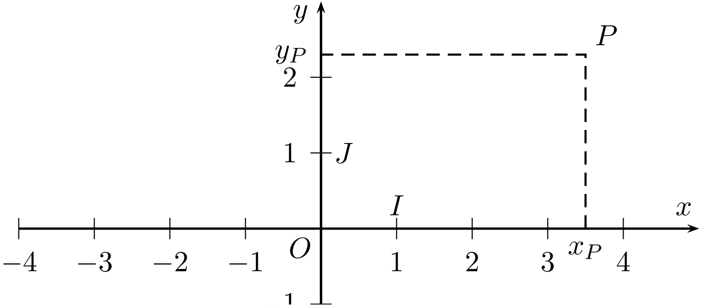
Ne pas noter

repère orthogonal (si $(OI) \perp (OJ)$) :



Ⓓ Ⓟ Dans un repère $(O\,;\,I,\,J)$, tout point P a un unique couple de coordonnées $(x_P\,;\,y_P)$.

Ⓓ Ⓟ Dans un repère $(O\,;\,I,\,J)$, tout point P a un unique couple de coordonnées $(x_P\,;\,y_P)$.
x_P est l'abscisse de P et y_P est l'ordonnée de P.



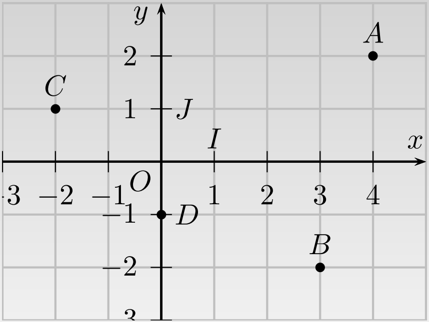
Questions rapides (ne pas noter)

Coordonnées de A :

Coordonnées de B :

Coordonnées de C :

Coordonnées de D :



Questions rapides (ne pas noter)

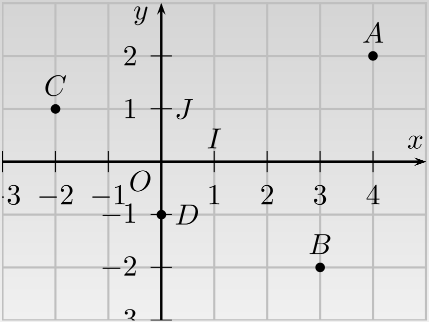
Coordonnées de A :

$(4\,;\,2)$.

Coordonnées de B :

Coordonnées de C :

Coordonnées de D :



Questions rapides (ne pas noter)

Coordonnées de A :

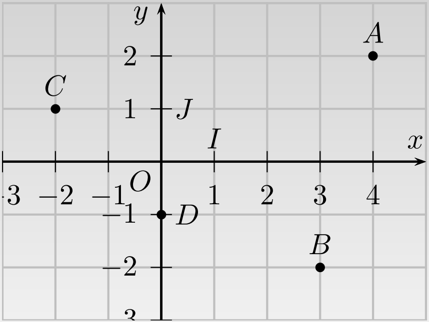
$(4\,;\,2)$.

Coordonnées de B :

$(3\,;\,-2)$.

Coordonnées de C :

Coordonnées de D :



Questions rapides (ne pas noter)

Coordonnées de A :

$(4\,;\,2)$.

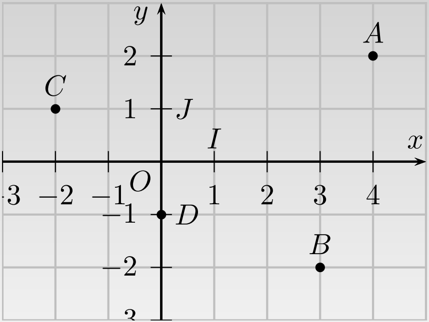
Coordonnées de B :

$(3\,;\,-2)$.

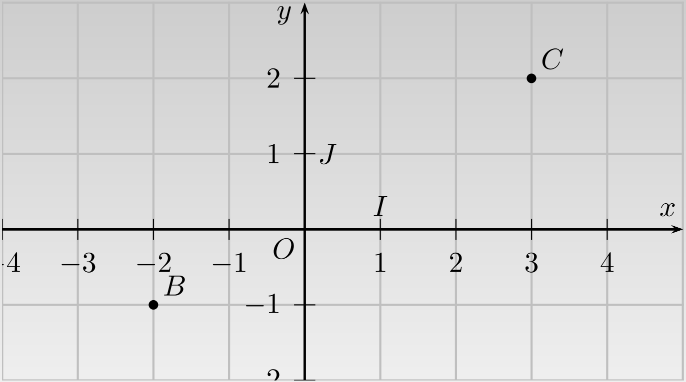
Coordonnées de C :

$(-2\,;\,1)$.

Coordonnées de D :



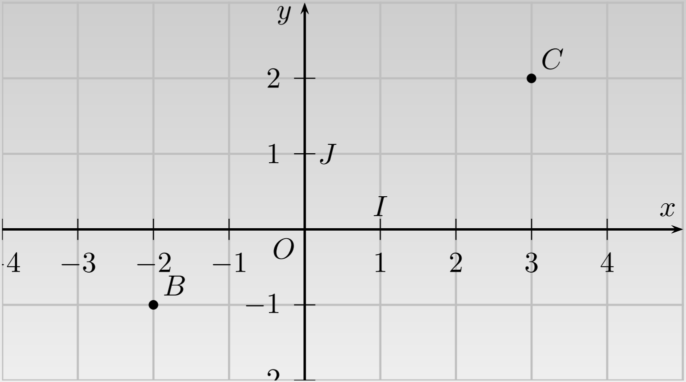
Questions rapides (ne pas noter)



$y_B =$

$x_C =$

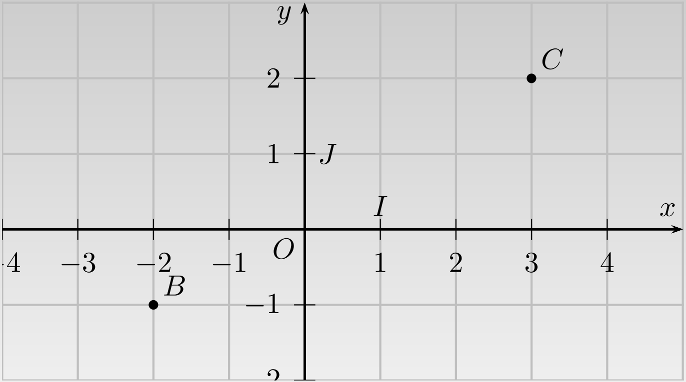
Questions rapides (ne pas noter)



$y_B = -1$

$x_C =$

Questions rapides (ne pas noter)



$y_B = \ -1$

$x_C = 3$

Partie exercices

Exercices 1 et 6 page 190.
Exercice 24 page 192

Questions rapides (ne pas noter)

Si $A\,(-2\,;\,7)$ et $B\,(-3\,;\,-1)$

alors $x_A + x_B =$

$y_A + y_B =$

Questions rapides (ne pas noter)

Si $A\,(-2\,;\,7)$ et $B\,(-3\,;\,-1)$

alors $x_A + x_B = \;-5$

$y_A + y_B =$

Questions rapides (ne pas noter)

Si $A\,(-2\,;\,7)$ et $B\,(-3\,;\,-1)$

alors $x_A + x_B = \; -5$

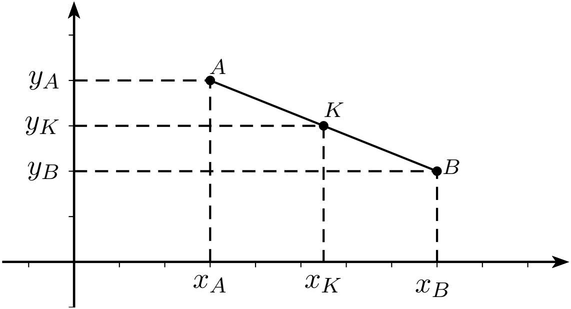
$y_A + y_B = 6$

II – Coordonnées du milieu d'un segment

℗ Soient $A\ (x_A\,;\,y_A)$ et $B\ (x_B\,;\,y_B)$ deux points.

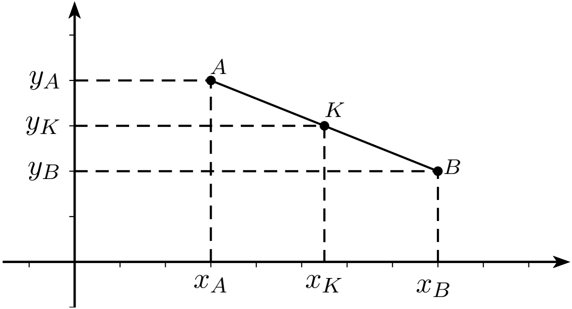
II – Coordonnées du milieu d'un segment

Ⓟ Soient $A\ (x_A\,;\,y_A)$ et $B\ (x_B\,;\,y_B)$ deux points.



II – Coordonnées du milieu d'un segment

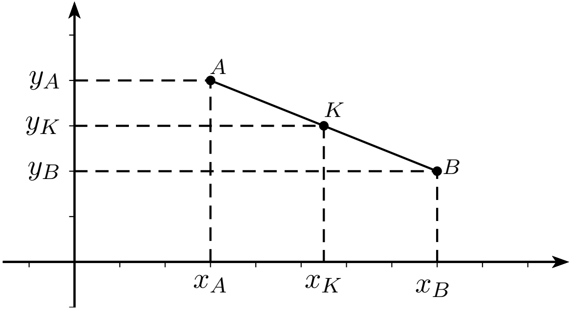
Ⓟ Soient $A\ (x_A\,;\,y_A)$ et $B\ (x_B\,;\,y_B)$ deux points.



K est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si

II – Coordonnées du milieu d'un segment

Ⓟ Soient $A\ (x_A\,;\,y_A)$ et $B\ (x_B\,;\,y_B)$ deux points.

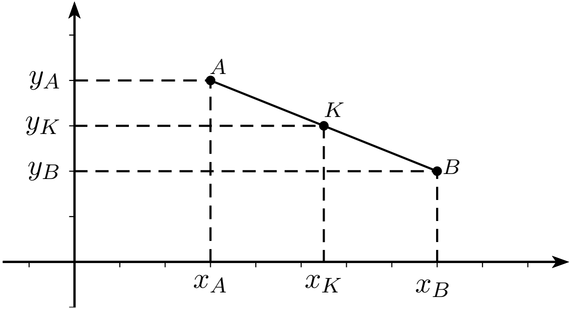


K est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si

$$\boxed{x_K = \frac{x_A + x_B}{2} \text{ et } y_K = \frac{y_A + y_B}{2}}.$$

II – Coordonnées du milieu d'un segment

Ⓟ Soient $A\ (x_A\,;\,y_A)$ et $B\ (x_B\,;\,y_B)$ deux points.



K est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si

$$\boxed{x_K = \frac{x_A + x_B}{2} \text{ et } y_K = \frac{y_A + y_B}{2}}.$$

(on calcule la moyenne des x puis celle des y).

Exemple 1

Si $F\ (-3\,;\,1)$ et $G\ (5\,;\,2)$ alors le milieu H de $[FG]$ a pour coordonnées :

Exemple 1

Si $F\ (-3\,;\,1)$ et $G\ (5\,;\,2)$ alors le milieu H de $[FG]$ a pour coordonnées :

$x_H = \dfrac{x_F + x_G}{2} = \dfrac{-3+5}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$ et

$y_H = \dfrac{y_F + y_G}{2} = \dfrac{1+2}{2} = \dfrac{3}{2}$

Exemple 1

Si $F\,(-3\,;\,1)$ et $G\,(5\,;\,2)$ alors le milieu H de $[FG]$ a pour coordonnées :

$x_H = \dfrac{x_F + x_G}{2} = \dfrac{-3+5}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$ et

$y_H = \dfrac{y_F + y_G}{(2}) = \dfrac{1+2}{2} = \dfrac{3}{2}$

donc $H \quad 1\,;\,\dfrac{3}{2} \quad .$

Questions rapides (ne pas noter)

Soient $A\ (5\,;\,2)$, $B\ (9\,;\,7)$, $C\ (-1\,;\,3)$.

Quelles sont les coordonnées du milieu de $[AB]$?

Soit K le milieu de $[AB]$, alors :

$$x_K = \frac{\ldots + \ldots}{2} = \frac{\ldots + \ldots}{2} = \frac{\ldots}{2} = \ldots$$

et

$$y_K = \frac{\ldots + \ldots}{2} = \frac{\ldots + \ldots}{2} = \frac{\ldots}{2} = \ldots$$

donc $K\left(\ldots\,;\,\ldots\right)$.

Questions rapides (ne pas noter)

Soient $A\ (5\,;\,2)$, $B\ (9\,;\,7)$, $C\ (-1\,;\,3)$.

Quelles sont les coordonnées du milieu de $[BC]$?

Soit L le milieu de $[BC]$, alors :

$$x_L = \frac{\boxed{\dots\dots} + \boxed{\dots\dots}}{2} = \frac{\boxed{\dots\dots} + \boxed{\dots\dots}}{2} = \frac{\boxed{\dots\dots}}{2} = \boxed{\dots\dots}$$

et

$$y_L = \frac{\boxed{\dots\dots} + \boxed{\dots\dots}}{2} = \frac{\boxed{\dots\dots} + \boxed{\dots\dots}}{2} = \frac{\boxed{\dots\dots}}{2} = \boxed{\dots\dots}$$

donc $L\left(\boxed{\dots\dots}\,;\,\boxed{\dots\dots}\right)$.

Ne pas noter

Applications :
– calculer les coordonnées d'un milieu !
– prouver qu'un quadrilatère est un parallèlogramme ;
– trouver les coordonnées du symétrique d'un point par rapport à un autre point.

Exemple 2

Soient, dans un repère $(O\,;\,I,\,J)$, les points :
$A\ (-2\,;\,1)$, $B\ (-1\,;\,4)$, $C\ (2\,;\,1)$, $D\ (1\,;\,-2)$.
Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

Exemple 3

Soient $R\,(-2\,;\,1)$ et $S\,(3\,;\,5)$.

Exemple 3

Soient $R\,(-2\,;\,1)$ et $S\,(3\,;\,5)$.
Calculer les coordonnées de U, symétrique de S par rapport à R.

Exemple 3

Soient $R\,(-2\,;\,1)$ et $S\,(3\,;\,5)$.
Calculer les coordonnées de U, symétrique de S par rapport à R.

Réponses

Exemple 3

Soient $R\,(-2\,;\,1)$ et $S\,(3\,;\,5)$.
Calculer les coordonnées de U, symétrique de S par rapport à R.

Réponses

U symétrique de S par rapport à $R \iff R$ est le milieu du

segment $[US]$

Exemple 3

Soient $R\,(-2\,;\,1)$ et $S\,(3\,;\,5)$.
Calculer les coordonnées de U, symétrique de S par rapport à R.

Réponses

U symétrique de S par rapport à $R \iff R$ est le milieu du segment $[US] \iff \begin{cases} x_R = \dfrac{x_U + x_S}{2} \\ y_R = \dfrac{y_U + y_S}{2} \end{cases}$

Exemple 3

Soient $R\,(-2\,;\,1)$ et $S\,(3\,;\,5)$.
Calculer les coordonnées de U, symétrique de S par rapport à R.

Réponses

U symétrique de S par rapport à $R \iff R$ est le milieu du segment $[US]$ $\iff \begin{cases} x_R = \dfrac{x_U + x_S}{2} \\ y_R = \dfrac{y_U + y_S}{2} \end{cases} \iff$

$$\begin{cases} -2 = \dfrac{x_U + 3}{2} \\ 1 = \dfrac{y_U + 5}{2} \end{cases}$$

Exemple 3

Soient $R\,(-2\,;\,1)$ et $S\,(3\,;\,5)$.
Calculer les coordonnées de U, symétrique de S par rapport à R.

Réponses

U symétrique de S par rapport à $R \iff R$ est le milieu du segment $[US]$ $\iff \begin{cases} x_R = \dfrac{x_U + x_S}{2} \\ y_R = \dfrac{y_U + y_S}{2} \end{cases} \iff$

$$\begin{cases} -2 = \dfrac{x_U + 3}{2} \\ 1 = \dfrac{y_U + 5}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} -4 = x_U + 3 \\ 2 = y_U + 5 \end{cases}$$

Exemple 3

Soient $R\,(-2\,;\,1)$ et $S\,(3\,;\,5)$.
Calculer les coordonnées de U, symétrique de S par rapport à R.

Réponses

U symétrique de S par rapport à $R \iff R$ est le milieu du segment $[US]$ $\iff \begin{cases} x_R = \dfrac{x_U + x_S}{2} \\ y_R = \dfrac{y_U + y_S}{2} \end{cases} \iff$

$$\begin{cases} -2 = \dfrac{x_U + 3}{2} \\ 1 = \dfrac{y_U + 5}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} -4 = x_U + 3 \\ 2 = y_U + 5 \end{cases} \iff \begin{cases} -7 = x_U \\ -3 = y_U \end{cases}$$

Exemple 3

Soient $R\,(-2\,;\,1)$ et $S\,(3\,;\,5)$.
Calculer les coordonnées de U, symétrique de S par rapport à R.

Réponses

U symétrique de S par rapport à $R \iff R$ est le milieu du segment $[US]$ $\iff \begin{cases} x_R = \dfrac{x_U + x_S}{2} \\ y_R = \dfrac{y_U + y_S}{2} \end{cases} \iff$

$\begin{cases} -2 = \dfrac{x_U + 3}{2} \\ 1 = \dfrac{y_U + 5}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} -4 = x_U + 3 \\ 2 = y_U + 5 \end{cases} \iff \begin{cases} -7 = x_U \\ -3 = y_U \end{cases}$

donc $U\ (-7\,;\,-3)$.

Partie exercices

Exercices 12, 13, 15 page 191.

III – Distance entre deux points

Partie exercices

Exercices 2, 3, 5 et 7 page 185

Questions rapides (ne pas noter)

Si $A\,(-2\,;\,7)$, $B\,(2\,;\,-4)$ et $C\,(-3\,;\,-1)$

alors $y_C - y_A =$

$x_A - x_B =$

Questions rapides (ne pas noter)

Si $A\,(-2\,;\,7)$, $B\,(2\,;\,-4)$ et $C\,(-3\,;\,-1)$

alors $y_C - y_A = \ -8$

$x_A - x_B =$

Questions rapides (ne pas noter)

Si $A\,(-2\,;\,7)$, $B\,(2\,;\,-4)$ et $C\,(-3\,;\,-1)$

alors $y_C - y_A = \;-8$

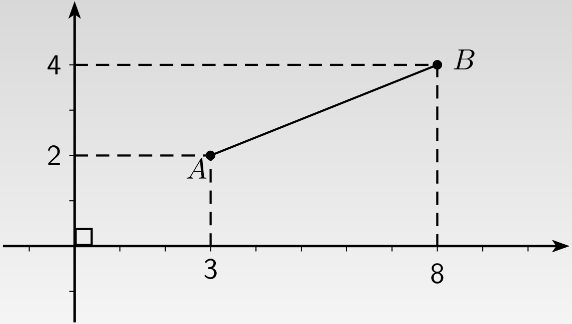
$x_A - x_B = \;-4$

Ne pas noter

Soient $A\ (3\,;\,4)$ et $B\ (8\,;\,2)$.
On cherche la distance exacte entre A et B.

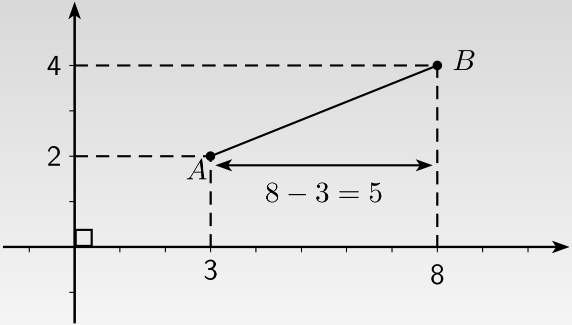
Ne pas noter

Soient $A\ (3\,;\,4)$ et $B\ (8\,;\,2)$.
On cherche la distance exacte entre A et B.



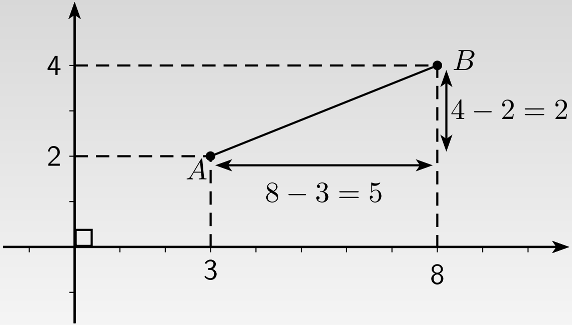
Ne pas noter

Soient $A\ (3\,;\,4)$ et $B\ (8\,;\,2)$.
On cherche la distance exacte entre A et B.



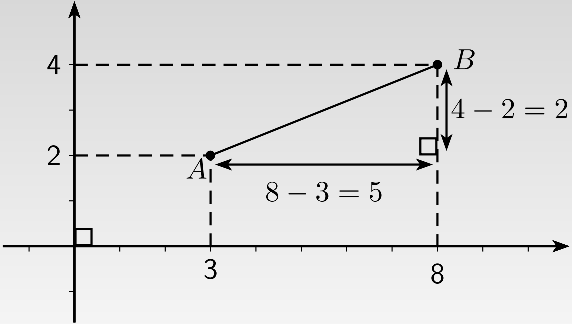
Ne pas noter

Soient $A\ (3\,;\,4)$ et $B\ (8\,;\,2)$.
On cherche la distance exacte entre A et B.



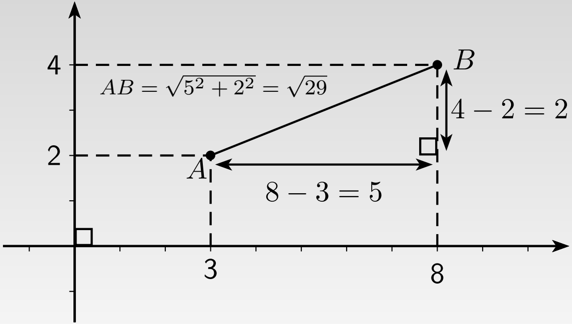
Ne pas noter

Soient $A\ (3\,;\,4)$ et $B\ (8\,;\,2)$.
On cherche la distance exacte entre A et B.



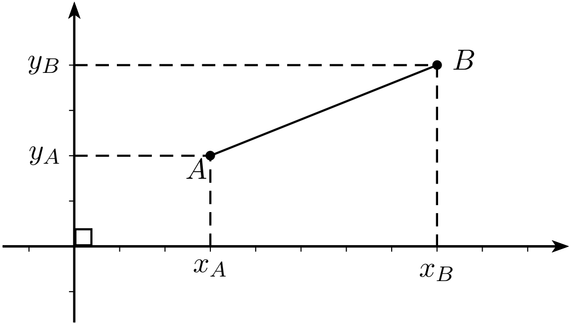
Ne pas noter

Soient $A\ (3\,;\,4)$ et $B\ (8\,;\,2)$.
On cherche la distance exacte entre A et B.

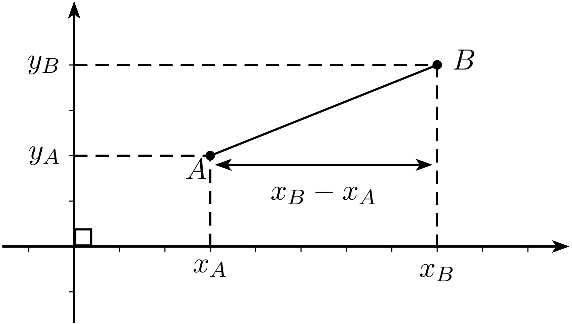


Ⓟ Soient $A\ (x_A\,;\,y_A)$ et $B\ (x_B\,;\,y_B)$ dans un **repère orthonormé**.

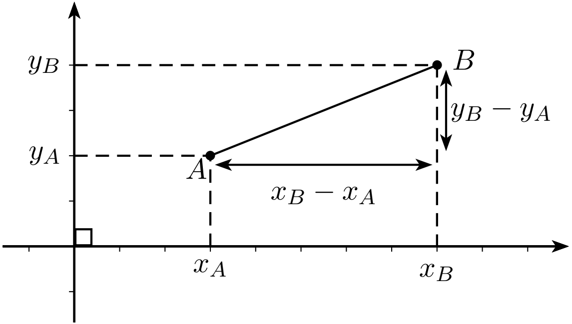
Ⓟ Soient $A\ (x_A\,;\,y_A)$ et $B\ (x_B\,;\,y_B)$ dans un **repère orthonormé**.



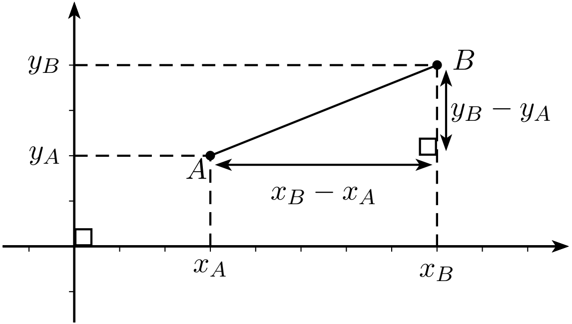
Ⓟ Soient $A\ (x_A\,;\,y_A)$ et $B\ (x_B\,;\,y_B)$ dans un **repère orthonormé**.



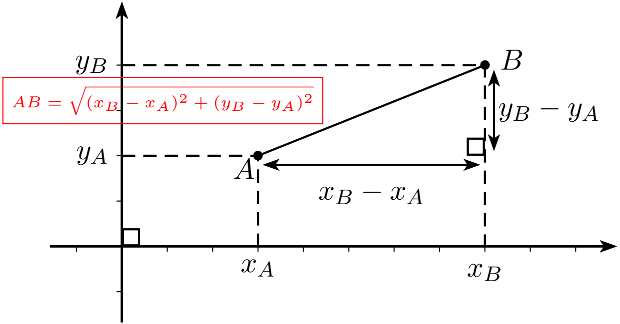
Ⓟ Soient $A\ (x_A\,;\,y_A)$ et $B\ (x_B\,;\,y_B)$ dans un **repère orthonormé**.



℗ Soient $A\ (x_A\,;\,y_A)$ et $B\ (x_B\,;\,y_B)$ dans un **repère orthonormé**.



℗ Soient $A\ (x_A\,;\,y_A)$ et $B\ (x_B\,;\,y_B)$ dans un **repère orthonormé**.



Exemple 4

Soient $M\,(-2\,;\,4)$ et $N\,(3\,;\,2)$.
Calculer la distance MN.

Exemple 4

Soient $M\,(-2\,;\,4)$ et $N\,(3\,;\,2)$.
Calculer la distance MN.

Réponses

Exemple 4

Soient $M\,(-2\,;\,4)$ et $N\,(3\,;\,2)$.
Calculer la distance MN.

Réponses

$$MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}$$

Exemple 4

Soient $M\,(-2\,;\,4)$ et $N\,(3\,;\,2)$.
Calculer la distance MN.

Réponses

$$\begin{aligned} MN &= \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2} \\ &= \sqrt{(3-(-2))^2 + (2-4)^2} \end{aligned}$$

Exemple 4

Soient $M\,(-2\,;\,4)$ et $N\,(3\,;\,2)$.
Calculer la distance MN.

Réponses

$$
\begin{aligned}
MN &= \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2} \\
&= \sqrt{(3-(-2))^2 + (2-4)^2} \\
&= \sqrt{5^2 + (-2)^2}
\end{aligned}
$$

Exemple 4

Soient $M\,(-2\,;\,4)$ et $N\,(3\,;\,2)$.
Calculer la distance MN.

Réponses

$$\begin{aligned} MN &= \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2} \\ &= \sqrt{(3-(-2))^2 + (2-4)^2} \\ &= \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29} \end{aligned}$$

® L'unité de longueur est OI.

® L'unité de longueur est OI.

® On ne peut pas éliminer la racine avec les carrés, par exemple, $\sqrt{3^2+4^2} \neq 3+4$.

® L'unité de longueur est OI.

® On ne peut pas éliminer la racine avec les carrés, par exemple, $\sqrt{3^2+4^2} \neq 3+4$.

® La valeur attendue comporte en général une racine carrée.

® L'unité de longueur est OI.

® On ne peut pas éliminer la racine avec les carrés, par exemple, $\sqrt{3^2+4^2} \neq 3+4$.

® La valeur attendue comporte en général une racine carrée.

® La formule ne fonctionne que dans un repère orthonormé.

® L'unité de longueur est OI.

® On ne peut pas éliminer la racine avec les carrés, par exemple, $\sqrt{3^2 \qquad\qquad}$

Questions rapides (ne pas noter)

Soient $A\ (5\,;\,2)$, $B\ (9\,;\,7)$, $C\ (-1\,;\,3)$.

Quelle est la distance AB ?

$$\begin{aligned}
AB &= \sqrt{(\ldots - \ldots)^2 + (\ldots - \ldots)^2} \\
&= \sqrt{(\ldots - \ldots)^2 + (\ldots - \ldots)^2} \\
&= \sqrt{(\ldots)^2 + (\ldots)^2} \\
&= \sqrt{\ldots + \ldots} = \sqrt{\ldots}
\end{aligned}$$

Questions rapides (ne pas noter)

Soient $A\ (5\,;\,2)$, $B\ (9\,;\,7)$, $C\ (-1\,;\,3)$.

Quelle est la distance CB ?

$$\begin{aligned}
CB &= \sqrt{(\boxed{\dots} - \boxed{\dots})^2 + (\boxed{\dots} - \boxed{\dots})^2} \\
&= \sqrt{(\boxed{\dots} - \boxed{\dots})^2 + (\boxed{\dots} - \boxed{\dots})^2} \\
&= \sqrt{(\boxed{\dots})^2 + (\boxed{\dots})^2} \\
&= \sqrt{\boxed{\dots} + \boxed{\dots}} = \sqrt{\boxed{\dots}}
\end{aligned}$$

Ne pas noter

Applications du calcul de distances :

Ne pas noter

Applications du calcul de distances :

- prouver qu'un triangle est rectangle ou isocèle ou équilatéral ;

Ne pas noter

Applications du calcul de distances :

- prouver qu'un triangle est rectangle ou isocèle ou équilatéral ;
- trouver une mesure d'un angle d'un triangle rectangle (trigonométrie) ;

Ne pas noter

Applications du calcul de distances :

- prouver qu'un triangle est rectangle ou isocèle ou équilatéral ;
- trouver une mesure d'un angle d'un triangle rectangle (trigonométrie) ;
- prouver qu'un point est sur un cercle ;

Ne pas noter

Applications du calcul de distances :

- prouver qu'un triangle est rectangle ou isocèle ou équilatéral ;
- trouver une mesure d'un angle d'un triangle rectangle (trigonométrie) ;
- prouver qu'un point est sur un cercle ;
- prouver qu'un point est sur une médiatrice ;

Ne pas noter

Applications du calcul de distances :

- prouver qu'un triangle est rectangle ou isocèle ou équilatéral ;
- trouver une mesure d'un angle d'un triangle rectangle (trigonométrie) ;
- prouver qu'un point est sur un cercle ;
- prouver qu'un point est sur une médiatrice ;
- etc.

Partie exercices

Exercices :
17 page 191
26 page 192
22 page 192
27 page 192