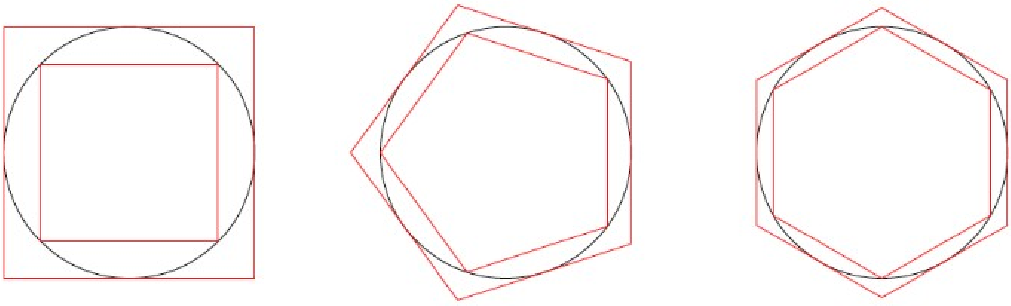
TP : Approximation de π par la méthode d'Archimède

Principe

Rappelons que le périmètre d'un cercle de diamètre D est π D donc, si l'on prend un diamètre égal à 1 (donc un rayon égal à 0,5), le périmètre est exactement π.

La méthode d'Archimède (– 287 → – 212) consiste à approcher le périmètre d'un cercle par celui de polygones inscrits ou exinscrits ayant de plus en plus de côtés (en fait, Archimède travaille plutôt sur les aires des disques et prend donc un disque de rayon 1).



Voyez cette animation sur Geogebra.

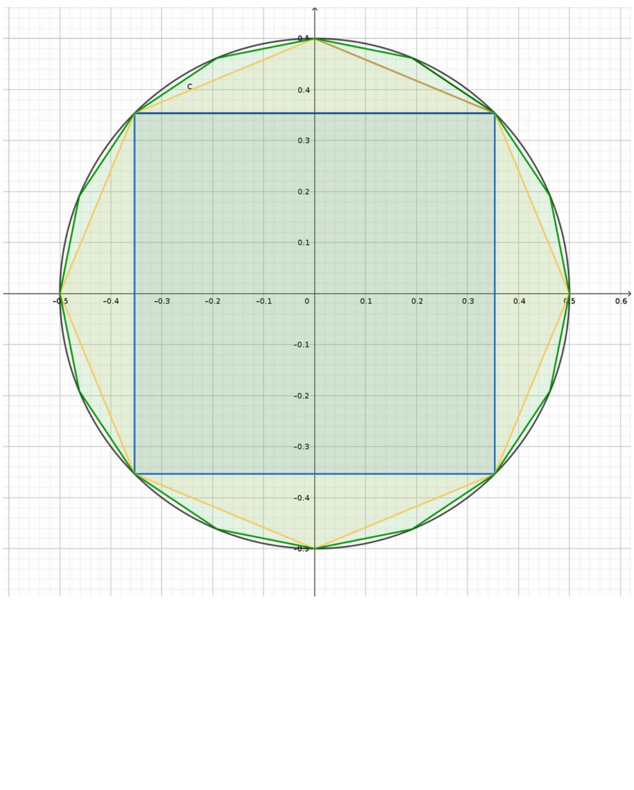
Archimède a poussé ses calculs jusqu'à arriver à un polygone à 96 côtés (le tout sans calculatrice ni système décimal !), ce qui lui a permis d'obtenir l'encadrement :

$$\frac{223}{71} \leq \pi \leq \frac{22}{7} \quad .$$

Par souci de simplicité de calcul, nous nous contenterons ici d'utiliser des polygones inscrits ayant 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; … côtés.

Nous commencerons par calculer le périmètre du carré puis nous chercherons comment passer d'un polygone au polygone suivant (qui a 2 fois plus de côtés que le précédent).

Plus précisément, nous allons chercher des formules permettant de calculer la longueur du côté d'un polygone à partir de celle du polygone précédent.



Utilisation de Geogebra

Construisez :

- un cercle de rayon 0,5 ;
- un carré inscrit dans ce cercle ;
- un octogone (8 côtés) inscrit dans ce cercle ;
- un hexadécagone (16 côtés) inscrit dans ce cercle.

Notez sur votre cahier la longueur du côté de chacun des trois polygones (avec 4 chiffres après la virgule). Calculez le périmètre approximatif de ces trois polygones.

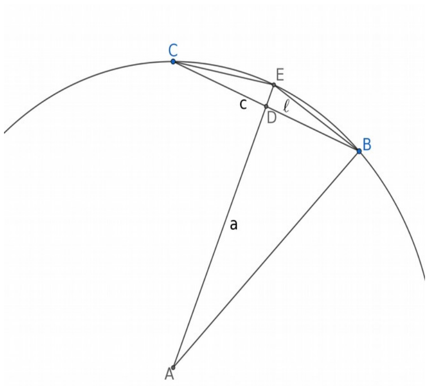
Premier polygone : un carré

Calculez la longueur exacte du côté du carré inscrit dans un cercle de rayon 1/2.

Passage d'un polygone au suivant

Sur la figure ci-contre, j'ai représenté :

- la longueur $c = CB$ du côté d'un polygone ;
- la longueur $\ell = EB$ du côté du polygone suivant ;
- la longueur $a = AD$, appelée *apothème* pour le polygone de côté $[BC]$.



Donnez une formule donnant a en fonction de c (rappel : le rayon est 1/2).

Ouvrez un tableur, entrez la longueur du côté du carré dans la cellule B2 (voir la capture d'écran ci-dessous). Entrez ensuite la formule que vous avez trouvée dans la cellule C2 pour le calcul de a.
Entrez enfin une formule pour le calcul du périmètre dans la cellule E2.

	A	B	C	D	E
1	Étapes	Côté c	Apothème a	Nb côtés	Périmètre
2	1	0,70710678118654800000	0,35355339059327300000	4	2,828427125

Cherchez maintenant une formule donnant ℓ en fonction de c et de a.

Entrez cette formule dans la cellule B3. Complétez la ligne 3 puis effectuez une recopie vers les bas pour obtenir le tableau qui suit.

	A	B	C	D	E
1	Étapes	Côté c	Apothème a	Nb côtés	Périmètre
2	1	0,70710678118654800000	0,35355339059327300000	4	2,828427125
3	2	0,38268343236509000000	0,46193976625564300000	8	3,061467459
4	3	0,19509032201612800000	0,49039264020161500000	16	3,121445152
5	4	0,09801714032956070000	0,49759236333609800000	32	3,136548491
6	5	0,04906767432741810000	0,49939772810258600000	64	3,140331157
7	6	0,02454122852291230000	0,49984940934810200000	128	3,141277251
8	7	0,01227153828571990000	0,49996235091957200000	256	3,141513801
9	8	0,00613588464915448000	0,49999058764130100000	512	3,14157294

Ajoutez une colonne donnant l'erreur faîte dans cette approximation.
(remarque : le tableur ne connaît pas tous les chiffres de π et les calculs faits sont approchés donc l'erreur ne peut être qu'approximative et faite jusqu'à une certaine précision).

Utilisation d'une suite définie par récurrence

Cherchez une formule donnant ℓ en fonction de c.
Notons (c_n) la suite des longueurs des côtés à chaque étape (ainsi c_1 est la longueur du côté du carré, c_2 est la longueur du côté de l'octogone, etc.).
Écrivez la définition de la suite ainsi définie par récurrence.

Créez une nouvelle feuille dans votre tableur. Faîtes en sorte qu'il n'y ait plus de colonne pour le calcul de l'apothème (voir la capture d'écran ci-dessous).

Étapes	Côté c	Nb côtés	Périmètre
1	0,7071067811865480000	4	2,828427125
2	0,3826834323650900000	8	3,061467459
3	0,1950903220161280000	16	3,121445152
4	0,0980171403295607000	32	3,136548491
5	0,0490676743274178000	64	3,140331157
6	0,0245412285229122000	128	3,141277251
7	0,0122715382857193000	256	3,141513801

Écrivez un algorithme en langage Python qui permet le calcul du périmètre d'un polygone quelconque (on pourra utiliser une fonction de paramètre n).
Entrez cet algorithme dans le logiciel Thonny, exécutez-le pour obtenir des approximations de π.

Modifiez cet algorithme pour qu'il affiche également l'erreur faite dans cette approximation.
(remarque : Python ne connaît pas à la base la valeur de π, il faut l'importer de la bibliothèque math avec la commande : **from math import π**).

Cherchez dans ce document comment définir une suite par récurrence dans Geogebra et appliquez cela à notre suite (c_n) pour retrouver des longueurs de côtés.

Compléments

Pour conclure, nous avons ici travaillé avec une suite définie par récurrence mais il est possible de trouver le périmètre d'un polygone explicitement en fonction du nombre de côtés n, vous pouvez par exemple consulter cette page.
Pour des éléments historiques, voyez cette page.
Enfin, pour d'autres méthodes d'approximation de π, il y a ce document (niveau universitaire par moments).