Corrigé du Devoir maison n°9

Exercice I

Barème
Total 9pts
1)a) 1,5pts
b) 1pts
c) 1pts
2)a) 2,5pts
b) 1pts
c) 0,5+1+0,5pts

1°) a) Périodicité :

• Pour x :

$$x(t+T)=x(t) \iff \cos(t+T)=\cos(t) \iff 1+\cos(2(t+T))=1+\cos(2t) \iff \cos(2t+2T)=\cos(2t)$$

donc $2T=2\pi$ d'où $T=\pi$.

• Pour y :

$y(t+T')=y(t) \iff \sin(3(t+T'))=\sin(3t) \iff \sin(3t+3T')=\sin(3t)$

donc $3T'=2\pi$ d'où $T'=\dfrac{2\pi}{3}$.

La période commune à x et à y est donc 2π (qui est égal à $2T$ et à $3T'$).
On peut donc réduire l'intervalle à un intervalle de longueur 2π donc, par exemple, $\boxed{I_0=[-\pi\,;\,\pi]}$.

b) Parité :

$x(-t)=1+\cos(2(-t))=1+\cos(-2t)=^{(*)}1+\cos(2t)=x(t)$ donc x est paire.
$^{(*)}$ car la fonction cosinus est paire
$y(-t)=\sin(3(-t))=\sin(-3t)=^{(*)}-\sin(3t)=-y(t)$ donc y est impaire.
$^{(*)}$ car la fonction sinus est impaire
Les deux fonctions ayant une propriété de parité, on peut réduire l'intervalle $[-\pi\,;\,\pi]$ à $\boxed{I_1=[0\,;\,\pi]}$.
Le point $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe des x.

c) • Pour x :

$x(\pi-t)=1+\cos(2(\pi-t))=1+\cos(2\pi-2t)=^{(1)}1+\cos(-2t)=^{(2)}1+\cos(2t)=x(t)$
$^{(1)}$ car 2π font un tour (cosinus est 2π périodique) ;
$^{(2)}$ car cosinus est paire.

• Pour y :

$y(\pi-t)=\sin(3(\pi-t))=\sin(3\pi-3t)=^{(1)}-\sin(-3t)=^{(2)}\sin(3t)=y(t)$
$^{(1)}$ car ajouter 3π revient à faire un demi tour donc change le signe du sinus ;
$^{(2)}$ car sinus est impaire.

Les points $\boxed{M(t) \text{ et } M(\pi-t) \text{ sont donc confondus}}$. Or, si $t\in\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ alors $\pi-t\in\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$ donc on peut réduire l'intervalle d'étude à $\boxed{I_2=\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]}$.

2°) a) En utilisant les formules $(\cos u)'=-u'\sin u$ et $(\sin u)'=u'\cos u$, on obtient $x'(t)=-2\sin(2t)$ et $y'(t)=3\cos(3t)$.

Signe de $x'(t)$: si $t\in\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ alors $2t\in[0\,;\,\pi]$ (donc partie supérieure du cercle trigo.) donc $\sin(2t)$ ¿ 0 d'où $x'(t)$ 6 0 : la fonction x est décroissante sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Signe de $y'(t)$: comme $t\in\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $3t\in\left[0\,;\,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ donc $\cos(3t)$ ¿ 0 quand $3t\in\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ donc quand $t\in\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{6}\right]$ et $\cos(3t)$ 6 0 quand $3t\in\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ donc quand $t\in\left[\dfrac{\pi}{6}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$: la fonction y est croissante sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{6}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{\pi}{6}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

t	0		$\pi/6$		$\pi/2$
$x'(t)$			$-$		
$x(t)$	2		$\searrow$		0
$y'(t)$		$+$	0	$-$	
$y(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

b)

	A	B	C	D
Paramètre	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	0
$x(t)$	2	$3/2$	$1/2$	0
$y(t)$	0	1	0	-1
$y'(t)$	3	0	-3	0

c) Les tangentes sont dirigées par le vecteur dérivé, s'il est non nul.
$x(t)=-\sin t$ et $y'(t)=2\cos(2t)$.

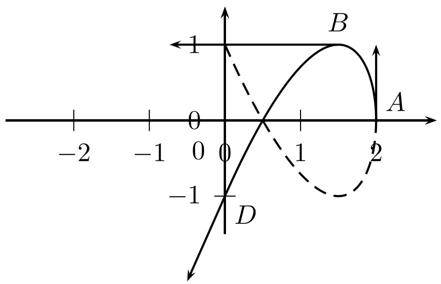
Pour $t=0$: $x'(0)=0$ et $y'(0)=3$ donc $\vec{M}'(0)\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ donc la tangente est verticale en A.

Pour $t=\dfrac{\pi}{6}$: $x'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}$ et $y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=0$ donc $\vec{M}'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}$ donc la tangente est horizontale en B.

Pour $t=\dfrac{\pi}{2}$: $x'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ et $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ mais le sujet nous donne les coordonnées (qu'on obtiendrait avec $x''(t)$ et $y''(t)$) d'un vecteur directeur de la tangente en D.

Sur le graphique ci-contre, on a réduit la taille des vecteurs tangents en A et en D (il suffit de diviser leurs coordonnées par 2, ou 3, ou...).

En pointillés, la partie de la courbe obtenue par symétrie (correspondant aux t entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et 0).



Exercice II

Barème

Total 10pts

1)a) 1pts

b) 1,5pts

c) 1pts

d) 1,5pts

2) 1pts

3)a) 2,5pts

b) 1,5pts

1°) a) x^n s'intègre en $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ et 2 a pour primitive $2x$. La constante en multiplication -5 ne bouge pas. Donc $\boxed{F(x) = \dfrac{-5x^2}{2} + 2x + k}$.

b) $g(x) = 3x^3 - \dfrac{1}{5}x^2 - 3$ donc $G(x) = 3 \times \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{1}{5} \times \dfrac{x^3}{3} - 3\,x + k = \boxed{\dfrac{3\,x^4}{4} - \dfrac{x^3}{15} - 3\,x + k}$.

c) Le 2 est une constante en multiplication donc ne bouge pas.
$\boxed{H(t) = 2\,\mathrm{e}^t - t^2 + k}$.

d) $i(x) = 4 \times \dfrac{1}{x} + 5\cos x - 3 \times \dfrac{1}{x^2+1}$ donc
$\boxed{I(x) = 4 \times \ln|x| + 5\sin x - 3\arctan x + k}$.

2°) Les primitives de f s'écrivent $F(x) = \dfrac{-5x^2}{2} + 2x + k$, ici nous voulons que $F(4) = 0$ donc $\dfrac{-5 \times 4^2}{2} + 2 \times 4 + k = 0$ donc $-32 + k = 0$ ce qui donne $k = 32$ donc $\boxed{F(x) = \dfrac{-5x^2}{2} + 2x + 32}$.

3°) a) Il suffit de vérifier que $K'(x) = k(x)$ (en utilisant la dérivée de uv et de e^u).

b) Comme $j(x) = k(x) + 5x^2 + 3$, on obtient

$$J(x) = K(x) + \frac{5x^3}{3} + 3x + c = \boxed{(1-x^2)\,\mathrm{e}^{-3x} + \frac{5x^3}{3} + 3x + k}.$$