$\boxed{\textbf{Corrigé du Devoir maison n°11}}$

Exercice I

Barème
Total 10pts
1)a) 0,5pts
b) 1pts
c) 1,5pts
d) 1,5pts
2)a 1pts
b) 1pts
c) 0,5pts
")a) 1,5pts
b) 1pts
c) 0,5pts

1°) a) Pour une translation, $\boxed{\overrightarrow{AA'} = \vec{u}}$ ce qui donne ici $\overrightarrow{EE_1} = \vec{u}$ donc
$\begin{cases} x_{E_1} - x_E = X_{\vec{u}} = -3 \\ y_{E_1} - y_E = Y_{\vec{u}} = 5 \end{cases}$

d'où $\begin{cases} x_{E_1} = -3 + x_E = -4 \\ y_{E_1} = 5 + y_E = 5 \end{cases}$.

Les coordonnées de E_1 sont donc $\boxed{(-4\,;\,5)}$.

b) Pour une homothétie, $\boxed{\overrightarrow{\Omega A'} = k\,\overrightarrow{\Omega A}}$ ce qui donne ici $\overrightarrow{AE_2} = -3\overrightarrow{AE}$ donc $\begin{cases} x_{E_2} - x_A = -3(x_E - x_A) = -3(-1-3) = 12 \\ y_{E_2} - y_A = -3(y_E - y_A) = -3(0-2) = 6 \end{cases}$

d'où $\begin{cases} x_{E_2} = 12 + x_A = 15 \\ y_{E_2} = 6 + y_A = 8 \end{cases}$.

Les coordonnées de E_2 sont donc $\boxed{(15\,;\,8)}$.

c) E_3 est donc l'image de E_1 par h donc $\overrightarrow{AE_3} = -3\overrightarrow{AE_1}$ donc
$\begin{cases} x_{E_3} - x_A = -3(x_{E_1} - x_A) = -3(-4-3) = 21 \\ y_{E_3} - y_A = -3(y_{E_1} - y_A) = -3(5-2) = -9 \end{cases}$

d'où $\begin{cases} x_{E_3} = 21 + x_A = 24 \\ y_{E_3} = -9 + y_A = -7 \end{cases}$.

Les coordonnées de E_3 sont donc $\boxed{(24\,;\,-7)}$.

d) E_4 est donc l'image de E_2 par t donc $\overrightarrow{E_2E_4} = \vec{u}$ donc
$\begin{cases} x_{E_4} - x_{E_2} = X_{\vec{u}} = -3 \\ y_{E_4} - y_{E_2} = Y_{\vec{u}} = 5 \end{cases}$

d'où $\begin{cases} x_{E_4} = -3 + x_{E_2} = 12 \\ y_{E_4} = 5 + y_{E_2} = 13 \end{cases}$.

Les coordonnées de E_4 sont donc $\boxed{(12\,;\,13)}$.

2°) La droite (d) a pour équation réduite $y = \dfrac{3}{2}x + 1$ (en isolant y) donc son coefficient directeur est $\dfrac{3}{2}$.
Par une homothétie ou une translation, l'image d'une droite est une droite parallèle donc le coefficient directeur est conservé, l'équation de l'image s'écrira donc $y = \dfrac{3}{2}x + p$ et il ne reste plus qu'à trouver l'image d'un point de (d), par exemple $K\ (0\,;\,1)$ pour trouver p.

a) $\overrightarrow{AK'} = -3\overrightarrow{AK}$ donc $\begin{cases} x_{K'} - x_A = -3(x_K - x_A) = -3(0-3) = 9 \\ y_{K'} - y_A = -3(y_K - y_A) = -3(1-2) = 3 \end{cases}$

d'où $\begin{cases} x_{K'} = 9 + x_A = 12 \\ y_{K'} = 3 + y_A = 5 \end{cases}$.

Les coordonnées de K' sont donc $(12\,;\,5)$.

Donc $5 = \dfrac{3}{2} \times 12 + p$,ce qui donne $p = 5 - 18 = -13$. Une équation de (d') est donc $\boxed{y = \dfrac{3}{2}x - 13}$.

b) Soit L l'image de K par t donc $\overrightarrow{KL} = \vec{u}$ donc
$\begin{cases} x_L - x_K = X_{\vec{u}} = -3 \\ y_L - y_K = Y_{\vec{u}} = 5 \end{cases}$

d'où $\begin{cases} x_L = -3 + x_K = -3 \\ y_L = 5 + y_K = 6 \end{cases}$.

Donc $6 = \dfrac{3}{2} \times (-3) + p$,ce qui donne $p = 6 + 4{,}5 = 10{,}5$. Une équation de l'image de (d) par t est donc $\boxed{y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{21}{2}}$.

c) Geogebra donne $\boxed{y = 1{,}5\,x - 41{,}5}$ sous forme réduite.

3°) Il suffit de trouver l'image du centre T du cercle (voir le 1°) pour les explications).

a) Par h, l'image de T est $(\ldots)$ $T'\ (9\,;\,14)$.
Une homothétie de rapport -3 multiplie les longueurs par 3 donc le nouveau rayon est $3 \times 5 = 15$ et l'équation du cercle est $\boxed{(x-9)^2 + (y-14)^2 = 225}$.

b) Par t, l'image de T est $(\ldots)$ $T''\ (-2\,;\,3)$.
Une translation ne modifie pas les longueurs donc le nouveau rayon est 5 et l'équation du cercle est $\boxed{(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25}$.

c) Geogebra donne $\boxed{(x-6)^2 + (y-19)^2 = 225}$.

Exercice II

Barème
Total 10pts
1)der 1pts
signes 1,5pts
Avar 1,5pts
2) 1pts
3) 1,5pts
4 1,5pts
5) 1pts
6) 1pts

1°) $x'(t) = 2t - 2$ donc $x'(t) > 0 \iff 2t - 2 > 0 \iff t > 1$.
$y'(t) = 3t^2 - 2t - 1$ est du second degré donc a le signe de $a = 3$ sauf entre les racines éventuelles.

Or il y a deux racines (Δ etc.), qui sont $-\dfrac{1}{3}$ et 1.

Voici donc le tableau des variations conjointes :

t	-1		$-1/3$		1		3
$x'(t)$			$-$		0	$+$	
$x(t)$	7	$\searrow$			3	$\nearrow$	7
$y'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$y(t)$	1	$\nearrow$	$59/27$	$\searrow$	1	$\nearrow$	17

2°)

	A	B	C	D	E
Paramètre	-1	0	1	2	3
$x(t)$	4	4	3	4	7
$y(t)$	1	2	1	4	17
$x'(t)$	-4	-2	0	2	4
$y'(t)$	4	-1	0	7	20

3°) Le vecteur dérivé, s'il est non nul est un vecteur tangent.
Donc, d'après le tableau ci-dessus : en A, c'est $\vec{M}'(-1) = \binom{-4}{4}$ (ou $\binom{-1}{1}$) ; en B, c'est $\vec{M}'(0) = \binom{-2}{-1}$; en C, $\vec{M}'(1) = \vec{0}$, voir après ; en D, c'est $\vec{M}'(2) = \binom{2}{7}$; en E, c'est $\vec{M}'(3) = \binom{4}{20}$ (ou $\binom{1}{5}$) ;
Dans le cas de C, l'énoncé nous signale qu'il faut utiliser le vecteur dérivé seconde, or $x''(t) = 2$ et $y''(t) = 6t - 2$ donc, pour $t = 1$, $\vec{M}''(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ dirige la tangente en C.

4°) Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en A est $\dfrac{y'(-1)}{x'(-1)} = -1$.
L'équation de cette tangente s'écrit donc $y = -x + p$ et elle passe par A $(7\,;\,1)$ donc $1 = -7 + p$ donc $p = 8$, l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en A est $\boxed{y = -x + 8}$.

5°) Geogebra donne $\boxed{y = 5\,x - 18}$.

6°)