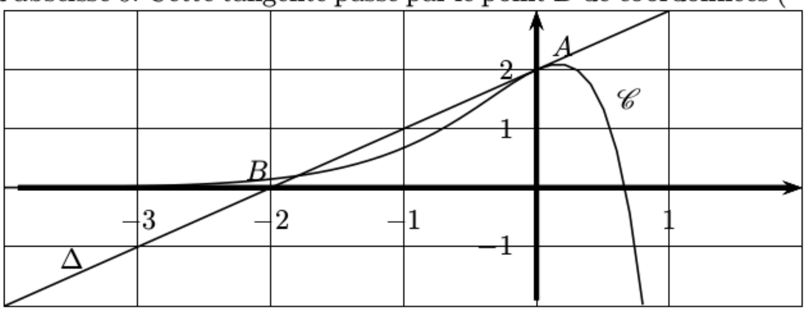
TP : révisions pour le CCF

Exercice I : étude de fonctions

L'exercice suivant a été fait en classe. Nous voyons ici comment répondre à *certaines questions* avec Geogebra (pour les questions avec l'icône ou sans icône).

1°) La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous représente dans un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax+b)\,\mathrm{e}^{2x}$, où a et b sont des nombres réels. La droite Δ est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 0. Cette tangente passe par le point B de coordonnées $(-2, 0)$.



a) Déterminer graphiquement $f(0)$.
b) Déterminer, graphiquement ou par le calcul, $f'(0)$.
c) Déterminer les valeurs des nombres réels a et b.

Dans la suite on admet que $f(x) = (-3x+2)\,\mathrm{e}^{2x}$.

2°) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3°) Donnez, par lecture graphique, l'équation d'une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
En admettant ce résultat, donnez une limite pour f.

4°) a) Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $f'(x) = (1-6x)\,\mathrm{e}^{2x}$;
b) Résoudre $f'(x) \geq 0$; en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Question 1°) c) : utilisation des curseurs

Dans la partie Saisie, entrez l'expression de f(x).
Placez le point A et la tangente en A.
Cherchez les valeurs de a et de b pour que la courbe ressemble à celle de l'énoncé.

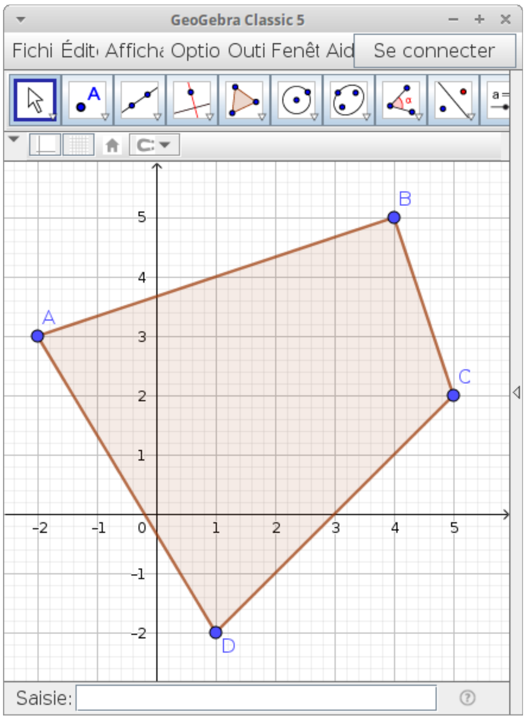
Si on doit chercher des valeurs plus précises de a et de b (par exemple à 0,01 près), on peut changer l'incrément et la taille des curseurs : modifiez le curseur a pour le faire varier de – 10 à 10 avec un incrément de 0,01.

Question 2°) et 4°) : utilisation du calcul formel
Utilisez le mode Calcul formel pour trouver les réponses à ces questions.

Exercice II : coordonnées dans le plan

Avec Geogebra, donnez :
– les coordonnées du milieu de [AC] ;
– la longueur exacte AB ;
– l'aire du quadrilatère ABCD ;
– une équation de chacune des droites (AB) et (DC) puis les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites ;
– le produit scalaire de $\overrightarrow{CB}$ et de $\overrightarrow{CD}$;
– le produit vectoriel de $\overrightarrow{CB}$ et de $\overrightarrow{CD}$;
– la mesure de l'angle en C du quadrilatère ABCD ;
– représentez le cercle circonscrit au triangle ABC ;
– l'aire du disque correspondant.

Retrouvez toutes ces réponses sans Geogebra.



Exercice III : coordonnées dans l'espace

Soient, dans un repère de l'espace, les points :

R (2 ; 0 ; – 1)   S (5 ; – 2 ; – 4)   T (0 ; 1 ; 4)
U (– 3 ; 3 ; 1)   V (1 ; 3 ; – 1)

Avec Geogebra, donnez :
– une représentation paramétrique de la droite (RT) ;
– la longueur exacte RT ;
– le produit scalaire de $\overrightarrow{SU}$ et de $\overrightarrow{SV}$;
– le produit vectoriel de $\overrightarrow{SU}$ et de $\overrightarrow{SV}$;
– une équation du plan (SUV) ;
– les coordonnées de l'intersection de (RT) et de (SUV) ;
– les coordonnées du projeté orthogonal de U sur la droite (RT) ;
– les coordonnées du projeté orthogonal de R sur le plan (SUV) ;
– une équation de la sphère de centre U et de rayon 6 ;
– les coordonnées des points d'intersection de (RT) et de cette sphère.

Retrouvez toutes ces réponses sans Geogebra.

Exercice IV : statistique à deux variables

Les résultats numériques seront obtenus à l'aide de la calculatrice et arrondis à 10^{-4}.

Un professeur de mathématiques ayant un peu de temps libre fait des mathématiques dans sa cuisine. Le tableau suivant donne des relevés de la température (en degrés celsius) d'un récipient d'eau placé dans un congélateur au temps $x = 49$ minutes.

temps (minutes) x_i	49	51	53	55	60	65	70	80
température (degrés) y_i	19	15	13	11	5,5	2	0	−1

En construisant le nuage de points associé à cette série, on constate que celui-ci n'est pas de forme rectiligne et qu'il n'est donc pas intéressant de chercher une relation de la forme $y = ax + b$.

1°) On pose $z_i = \ln(y_i + 1,6)$.

a) Recopier et compléter le tableau suivant où z_i est arrondi à 10^{-4} :

x_i	49	51	53	55	60	65	70	80
z_i								

b) Donner le coefficient de corrélation linéaire de la série $(x_i\,;\,z_i)$. Que peut-on en déduire ?

c) Écrire une équation de la droite d'ajustement affine de z en x par la méthode des moindres carrés.

d) En déduire une expression de la température en fonction du temps (expression bien sûr approximative).

2°) En utilisant cette expression, donner une estimation de :

a) la température au temps $x = 75$ minutes ;

b) le moment où l'eau commence à geler ;

c) le temps nécessaire pour que la température passe de 19° à 7°.

3°) Le professeur pensait que tout allait bien, sauf qu'au temps $x = 140$ minutes, l'eau est à -5 degrés. Quel problème cela pose-t-il ?

Conclusion : on ne s'improvise pas professeur de sciences physiques ...

Exercice V : statistiques (d'après sujet AEA 2003)

Partie A : étude d'un échantillon.

Dans la production d'une journée, on étudie un échantillon de 200 pieds, dont on mesure le longueurs. On obtient la série suivante :

Longueur en cm	[70,6 ; 70,7[	[70,7 ; 70,8[	[70,8 ; 70,9[	[70,9 ; 71,0[	[71,0 ; 71,1[	[71,1 ; 71,2[	[71,2 ; 71,3[	[71,3 ; 71,4[
Effectif	2	6	20	40	48	48	32	4

1°) Calculer, à 0,1 mm près, la longueur moyenne et l'écart-type de cette série.

2°) Un pied de table n'est pas utilisable si sa longueur est inférieure à 70,8 cm. Quel est dans cet échantillon le pourcentage de pieds défectueux ?

Partie B : réglage de la machine.

La longueur moyenne des pieds peut varier d'un jour à l'autre. La fabrication est jugée acceptable tant que la longueur moyenne des pieds est supérieure ou égale à 70,8 cm. Le tableau suivant contient les longueurs moyennes en cm des pieds au cours des 7 premiers jours de fabrication.

Jour x_i	0	1	2	3	4	5	6
Longueur moyenne y_i	71	70,99	70,98	70,97	70,95	70,92	70,90

1°) Représenter le nuage des points $M_i\,(x_i; y_i)$ dans un repère orthogonal, avec pour unités :
En abscisse : 2 cm pour 1 jour.
En ordonnée : 1 cm pour 0,1 cm (commencer la graduation à 70,0 cm).

2°) Un ajustement affine de ce nuage de points semble-t-il approprié ? Justifier.

3°) À l'aide de la calculatrice, donner :

a) le coefficient de corrélation entre x et y à 10^{-2} près ;

b) une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés (*arrondir les coefficients à 4 décimales*).

4°) A l'aide de cette équation de droite, déterminer au bout de combien de jours il faudra à nouveau régler la machine.