

## Suppléments : Sphères, plans et droites dans l'espace

### Exercice I

Soit, dans un repère orthonormé  $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , les points :

$$A(1; -1; 2) \quad B(2; -2; 0) \quad C(-1; 3; 1) \quad T(2; 3; -1)$$

1°) On cherche à calculer la distance  $d$  entre le point  $T$  et le plan  $(ABC)$ .

Soit  $H$  le projeté orthogonal de  $T$  sur le plan  $(ABC)$ .

- Donner une équation du plan  $(ABC)$ .
  - Donner un vecteur directeur de la droite  $(TH)$ .
  - En déduire une représentation paramétrique de cette droite.
  - En déduire les coordonnées du point  $H$  puis la distance  $d$  recherchée.
  - Vérifier avec la formule du cours.
- 2°) Soit  $(Q)$  le plan d'équation  $y = z$ .
- Prouver que les plans  $(ABC)$  et  $(Q)$  sont sécants.
  - Donner une représentation paramétrique de leur droite d'intersection  $(\Delta)$ .
- 3°) Les droites  $(\Delta)$  et  $(TH)$  sont-elles sécantes ?
- 4°) Soit  $(S)$  la sphère de centre  $T$  et de rayon 4. Quelle est la nature de l'intersection  $(\Gamma)$  de  $(S)$  et de  $(ABC)$  ? Indiquer les éléments caractéristiques de  $(\Gamma)$ .

### Exercice II (exercice du sujet 1994)

Dans l'espace rapporté au repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère la courbe  $\mathcal{C}$  décrite par les points dont les coordonnées cartésiennes sont :

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{3} \sin t + \frac{\sqrt{2}}{2} \\y &= \frac{3}{2} \cos t - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin t + \frac{\sqrt{2}}{2} \\z &= -\frac{3}{2} \cos t - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin t + \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

où  $t$  varie dans l'intervalle  $[0; \pi]$ .

- Montrer que tous les points de la courbe  $\mathcal{C}$  sont sur une sphère  $\Sigma$  de centre  $O$ , dont on précisera le rayon.
- Simplifier l'expression donnant  $x + y + z$  en fonction de  $t$ . Montrer que tous les points de la courbe  $\mathcal{C}$  sont dans un plan  $P$  dont on précisera l'équation.
- On rappelle que la distance du point  $M(x_0, y_0, z_0)$  au plan d'équation  $ux + vy + wz + h = 0$  est donnée par la formule  $d = \frac{|ux_0 + vy_0 + wz_0 + h|}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$ . Calculer la distance de  $O$  au plan  $P$ .
- Montrer que tous les points de la courbe  $\mathcal{C}$  sont situés sur un cercle. Préciser les coordonnées du centre et le rayon de ce cercle.