Exercices : Sphères, droites et plans dans l'espace

Dans tous les exercices, on se place dans un repère orthonormal de l'espace $\left(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\right)$.

Exercice I (sphères)

1°) Donnez l'équation de la sphère S de centre $\Omega\,(-1\,;\,2\,;\,-6)$ et de rayon 3.

2°) Retrouvez le centre et le rayon de la sphère S' d'équation $x^2+y^2+z^2-4x+6y+z-1=0$.

3°) Justifiez que S et S' ne sont pas sécantes.

Exercice II (droites)

Soient les points :
$A\,(1\,;\,-1\,;\,2)$ $B\,(0\,;\,1\,;\,0)$ $C\,(3\,;\,2\,;\,2)$ $D\,(-4\,;\,2\,;\,-4)$ $E\,(-3\,;\,1\,;\,2)$.

1°) Donnez une représentation paramétrique de la droite (AC).

2°) Donnez une représentation paramétrique de la droite (BD).

3°) Vrai ou faux :

a) Le point E appartient à la droite (AC).

b) La représentation paramétrique suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 4+t \\ y &=& 5+2t \\ z &=& -1-t \end{array}\right. \qquad t\in\mathbb{R}$$

définit la droite (AB).

4°) a) Calculez les coordonnées du projeté orthogonal de B sur la droite (AC).

b) En déduire la distance entre B et (AC).

5°) a) Les droites (AC) et (BD) sont-elles orthogonales ?

b) Les droites (AC) et (BD) sont-elles parallèles ?

c) Démontrez que les droites (AC) et (BD) sont sécantes.

d) Calculez les coordonnées de leur point d'intersection.

Exercice III (plans)

On reprend les points de l'exercice II.

1°) Donnez les coordonnées du projeté orthogonal de D sur le plan (Oyz).

2°) Donnez les coordonnées du projeté orthogonal de C sur le plan d'équation $y=-1$.

3°) Le plan (ABC) a-t-il pour équation $2x+4y+3z-4=0$?

Exercice IV (vecteur normal à un plan)

1°) Donnez un vecteur normal du plan P d'équation $4x-y+2z+7=0$.

2°) Soit P' le plan d'équation P d'équation $2x-3y+z-4=0$.
Les plans P et P' sont-ils sécants ?
Quelle est la nature de leur intersection ?

Exercice V (plans définis par une orthogonalité)

On reprend les points de l'exercice II.

1°) Donnez une équation du plan perpendiculaire à (AC) et passant par B.

2°) En utilisant la représentation paramétrique de la droite (AC) trouvée à l'exercice II, retrouvez les coordonnées du projeté orthogonal de B sur la droite (AC).

3°) Soit S la sphère de centre B et passant par C.
Déterminez une équation du plan tangent à S en C.

Exercice VI (plan passant par trois points)

Soient les points : $M\,(0\,;\,3\,;\,2)$ $N\,(-4\,;\,0\,;\,0)$ $P\,(-2\,;\,0\,;\,1)$ $Q\,(2\,;\,-5\,;\,3)$

1°) À l'aide d'un système, donnez une équation du plan (MNP).

2°) M, N, P, Q sont-ils coplanaires ?

Exercice VII (plan passant par trois points)

On reprend les points de l'exercice II.

1°) Donnez une équation du plan (ABC).

2°) Vérifiez que D appartient au plan (ABC).

Exercice VIII (équation normale d'un plan)

On reprend les points de l'exercice II.

1°) Donnez une équation normale du plan (ABC).

2°) En déduire la distance entre le point E et le plan (ABC).

Exercice IX (intersection de deux plans)

Nous avons vu dans un exercice précédent que les plans P d'équation $4x - y + 2z + 7 = 0$ et P' d'équation $2x - 3y + z - 4 = 0$ sont sécants.

1°) Donnez une représentation paramétrique de leur droite d'intersection.

2°) Soit P'' le plan d'équation $x - 2y + z - 5 = 0$.
Vérifiez que P, P' et P'' n'ont qu'un point d'intersection.

Exercice X (projection orthogonale d'un point sur un plan)

On reprend les points de l'exercice II et on rappelle qu'une équation du plan (ABC) est $6x - 4y - 7z + 4 = 0$.

1°) Donnez une représentation paramétrique de la droite perpendiculaire à (ABC) et passant par E.

2°) a) En déduire les coordonnées du projeté orthogonal de E sur (ABC).
b) En déduire la distance entre le point E et le plan (ABC).

Exercice XI (intersection droite-sphère)

On reprend les points de l'exercice II et la sphère S de centre B et passant par C.

Déterminez les coordonnées des points d'intersection, s'ils existent, de la droite (AD) et de la sphère S.

Exercice XII (intersection plans-sphère)

Déterminez les coordonnées des points communs (s'il y en a) aux deux plans d'équations $x - 5z + 8 = 0$ et $2x + 3y - 4z - 20 = 0$ et à la sphère de centre $\Omega\ (-2\,;\,5\,;\,1)$ et de rayon $\sqrt{26}$.

Exercice XIII (sphère tangente)

Soient : $E\,(2\,;\,-1\,;\,3)$; $F\,(-5\,;\,6\,;\,2)$; $G\,(-3\,;\,8\,;\,6)$; $T\,(7\,;\,-3\,;\,-1)$.

Déterminez une équation de la sphère de centre T tangente au plan (EFG).

Exercice XIV (un peu de tout)

Soit $\left(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\right)$ un repère orthonormal de l'espace.

On considère le point $\Omega\,(-2\,;\,0\,;\,1)$ et (S) la sphère de centre Ω et de rayon 11.

1°) Soit A le point de coordonnées $(7\,;\,2\,;\,-5)$.
a) Vérifier que A appartient à (S).
b) Déterminer les coordonnées du point K, diamètralement opposé au point A sur la sphère (S).
c) Trouver une équation du plan (P) tangent à (S) en son point K.

2°) Soit B le point de coordonnées $(-9\,;\,-5\,;\,9)$.
a) Montrer que B appartient au plan (P).
b) Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).
En déduire que cette droite coupe (S) en un point C, distinct de A, dont on déterminera les coordonnées.
c) Calculer $AC \times AB$ et comparer avec le diamètre de la sphère (S).

3°) Soit (D) la droite de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -15 + 6t \\ y & = & -5 \\ z & = & 9t \end{array}\right. \qquad t \in \mathbb{R}$$

a) Montrer que (D) est contenue dans (P).
b) Montrer que (D) passe par B.

4°) Soit (Δ) la droite de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -6 - 3t \\ y & = & 8 + t \\ z & = & -8 \end{array}\right. \qquad t \in \mathbb{R}$$

a) Prouver que (Δ) et (S) n'ont qu'un seul point d'intersection. Que peut-on en déduire pour (Δ) et (S) ?
b) Les droites (Δ) et (D) sont-elles sécantes ?