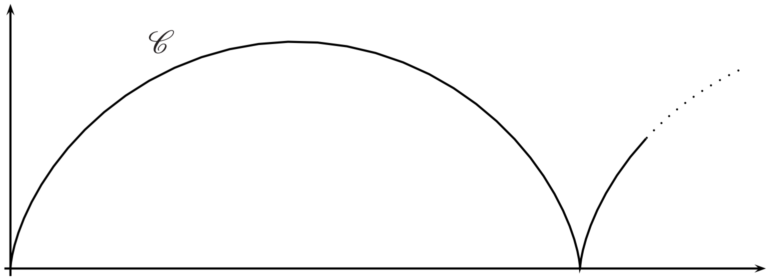
Exercice : longueur d'une courbe, courbure

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$, on considère la cycloïde $\mathscr{C}$ d'équations : $\begin{cases} x(t) = 3(t - \sin t) \\ y(t) = 3(1 - \cos t) \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.



1°) On cherche à calculer la longueur ℓ d'une arche. On rappelle la formule du cours donnant l'abscisse curviligne d'un point : $\boxed{s(t) = \int_{t_0}^{t} ||\vec{M}'(u)||\,\mathrm{d}u = \int_{t_0}^{t} \sqrt{(x'(u))^2 + (y'(u))^2}\,\mathrm{d}u}$ où t_0 est la valeur du paramètre correspondant au point d'origine des abscisses curvilignes.

a) Prouver que $\ell = 3\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos u}\,\mathrm{d}u$.

b) À l'aide d'une formule donnée dans le formulaire, retrouver l'égalité $1 - \cos u = 2\sin^2 \dfrac{u}{2}$.

c) En déduire ℓ.

2°) On s'intéresse dans cette question au lieu Γ des centres de courbure à la courbe $\mathscr{C}$ (Γ est la *développée* de $\mathscr{C}$).

a) Rappeler la formule donnant le vecteur normal $\vec{N}$, ainsi que le rayon de courbure R en un point M de paramètre t.

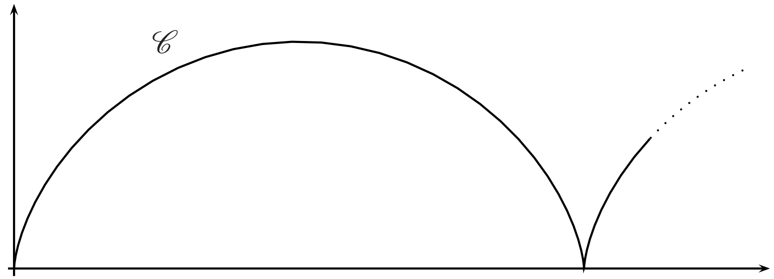
b) En déduire une formule donnant les coordonnées du centre de courbure en fonction de x, y, x', y', x'', y''.

c) Appliquer cette formule au cas présent.

d) Soient $M(t)$ et $N(t)$ les points de $\mathscr{C}$ et de Γ (respectivement) de paramètres t.
Écrire les coordonnées de $M(t + \pi)$.
Donner celles du vecteur d'origine $M(t + \pi)$ et d'extrémité $N(t)$.
Que peut-on en déduire pour la courbe Γ ?

Exercice : longueur d'une courbe, courbure

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$, on considère la cycloïde $\mathscr{C}$ d'équations : $\begin{cases} x(t) = 3(t - \sin t) \\ y(t) = 3(1 - \cos t) \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.



1°) On cherche à calculer la longueur ℓ d'une arche. On rappelle la formule du cours donnant l'abscisse curviligne d'un point : $\boxed{s(t) = \int_{t_0}^{t} ||\vec{M}'(u)||\,\mathrm{d}u = \int_{t_0}^{t} \sqrt{(x'(u))^2 + (y'(u))^2}\,\mathrm{d}u}$ où t_0 est la valeur du paramètre correspondant au point d'origine des abscisses curvilignes.

a) Prouver que $\ell = 3\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos u}\,\mathrm{d}u$.

b) À l'aide d'une formule donnée dans le formulaire, retrouver l'égalité $1 - \cos u = 2\sin^2 \dfrac{u}{2}$.

c) En déduire ℓ.

2°) On s'intéresse dans cette question au lieu Γ des centres de courbure à la courbe $\mathscr{C}$ (Γ est la *développée* de $\mathscr{C}$).

a) Rappeler la formule donnant le vecteur normal $\vec{N}$, ainsi que le rayon de courbure R en un point M de paramètre t.

b) En déduire une formule donnant les coordonnées du centre de courbure en fonction de x, y, x', y', x'', y''.

c) Appliquer cette formule au cas présent.

d) Soient $M(t)$ et $N(t)$ les points de $\mathscr{C}$ et de Γ (respectivement) de paramètres t.
Écrire les coordonnées de $M(t + \pi)$.
Donner celles du vecteur d'origine $M(t + \pi)$ et d'extrémité $N(t)$.
Que peut-on en déduire pour la courbe Γ ?

Corrigé (longueur d'une courbe et courbure)

1°) a) On a $\ell = s(2\pi)$ avec $t_0 = 0$.
Pour tout point de $\mathscr{C}$, on a :

$$\begin{aligned}\sqrt{(x'(u))^2 + (y'(u))^2} &= \sqrt{(3(1-\cos u))^2 + (3\sin u)^2}\\ &= \sqrt{9(1-2\cos u + \cos^2 u) + 9\sin^2 u}\\ &= 3\sqrt{1-2\cos u + \cos^2 u + \sin^2 u}\\ &= 3\sqrt{2-2\cos u} = 3\sqrt{2}\sqrt{1-\cos u}.\end{aligned}$$

b) On peut utiliser la formule : $\cos p - \cos q = -2\sin\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$, en posant $p = 0$ et $q = u$.

c) Donc $\ell = 3\sqrt{2}\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2\frac{u}{2}}\,\mathrm{d}u = 6\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{u}{2}\right|\,\mathrm{d}u$.
Comme $u \in [\,0\,;\,2\pi\,]$, $\dfrac{u}{2} \in [\,0\,;\,\pi\,]$ donc $\sin\dfrac{u}{2} \geqslant 0$ et $\left|sin\dfrac{u}{2}\right| = \sin\dfrac{u}{2}$.
Par conséquent, $\ell = 6\left[-2\cos\dfrac{u}{2}\right]_0^{2\pi} = 6(-2\cos\pi - (-2\cos 0)) = 24$ (unités de longueur).

2°) a) Extrait du cours : dans le cas d'une courbe paramètrée, $\vec{N}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{-y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\,;\,\dfrac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\right)$ et $R = \dfrac{(x'^2+y'^2)^{3/2}}{x'y''-y'x''}$.

b) Le centre de courbure est défini par $\overrightarrow{M\Omega} = R\vec{N}$. Ceci donne :
$x_\Omega - x = \dfrac{(x'^2+y'^2)^{3/2}}{x'y''-y'x''} \times \dfrac{-y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} = \dfrac{-y'(x'^2+y'^2)}{x'y''-y'x''}$ donc
$x_\Omega = x + \dfrac{-y'(x'^2+y'^2)}{x'y''-y'x''}$. De même, on trouve $y_\Omega = y + \dfrac{x'(x'^2+y'^2)}{x'y''-y'x''}$.

c) Ici, on obtient : $x'^2 + y'^2 = 18(1-\cos t)$ (voir 1°)a)) et
$x'y''-y'x'' = 9(1-\cos t)\cos t - 9\sin^2 t = 9(\cos t - \cos^2 t - \sin^2 t) = 9(\cos t - 1)$
donc $\dfrac{(x'^2+y'^2)}{x'y''-y'x''} = -2$. On en déduit que $x_\Omega = x + 2y' = 3(t+\sin t)$ et $y_\Omega = y - 2x' = -3(1-\cos t)$.

d) Les coordonnées de $M(t+\pi)$ sont
$x_M = 3(t+\pi-\sin(t+\pi)) = 3\pi + 3(t-(-\sin t)) = 3\pi + 3(t+\sin t)$;
$y_M = 3(1-\cos(t+\pi)) = 3(1+\cos t)$.
Celles de $N(t)$ sont $x_N = 3(t+\sin t)$; $y_N = -3(1-\cos t)$.
Celles du vecteur d'origine $M(t+\pi)$ et d'extrémité $N(t)$ sont donc :
$x_N - x_M = -3\pi$; $y_N - y_M = -6$
Quand t décrit $\mathbb{R}$, $t+\pi$ décrit aussi $\mathbb{R}$. La courbe Γ s'obtient à partir de la courbe $\mathscr{C}$ par une translation de vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}-3\pi\\-6\end{pmatrix}$. Γ est donc aussi une cycloïde.

Corrigé (longueur d'une courbe et courbure)

1°) a) On a $\ell = s(2\pi)$ avec $t_0 = 0$.
Pour tout point de $\mathscr{C}$, on a :

$$\begin{aligned}\sqrt{(x'(u))^2 + (y'(u))^2} &= \sqrt{(3(1-\cos u))^2 + (3\sin u)^2}\\ &= \sqrt{9(1-2\cos u + \cos^2 u) + 9\sin^2 u}\\ &= 3\sqrt{1-2\cos u + \cos^2 u + \sin^2 u}\\ &= 3\sqrt{2-2\cos u} = 3\sqrt{2}\sqrt{1-\cos u}.\end{aligned}$$

b) On peut utiliser la formule : $\cos p - \cos q = -2\sin\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$, en posant $p = 0$ et $q = u$.

c) Donc $\ell = 3\sqrt{2}\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2\frac{u}{2}}\,\mathrm{d}u = 6\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{u}{2}\right|\,\mathrm{d}u$.
Comme $u \in [\,0\,;\,2\pi\,]$, $\dfrac{u}{2} \in [\,0\,;\,\pi\,]$ donc $\sin\dfrac{u}{2} \geqslant 0$ et $\left|sin\dfrac{u}{2}\right| = \sin\dfrac{u}{2}$.
Par conséquent, $\ell = 6\left[-2\cos\dfrac{u}{2}\right]_0^{2\pi} = 6(-2\cos\pi - (-2\cos 0)) = 24$ (unités de longueur).

2°) a) Extrait du cours : dans le cas d'une courbe paramètrée, $\vec{N}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{-y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\,;\,\dfrac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\right)$ et $R = \dfrac{(x'^2+y'^2)^{3/2}}{x'y''-y'x''}$.

b) Le centre de courbure est défini par $\overrightarrow{M\Omega} = R\vec{N}$. Ceci donne :
$x_\Omega - x = \dfrac{(x'^2+y'^2)^{3/2}}{x'y''-y'x''} \times \dfrac{-y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} = \dfrac{-y'(x'^2+y'^2)}{x'y''-y'x''}$ donc
$x_\Omega = x + \dfrac{-y'(x'^2+y'^2)}{x'y''-y'x''}$. De même, on trouve $y_\Omega = y + \dfrac{x'(x'^2+y'^2)}{x'y''-y'x''}$.

c) Ici, on obtient : $x'^2 + y'^2 = 18(1-\cos t)$ (voir 1°)a)) et
$x'y''-y'x'' = 9(1-\cos t)\cos t - 9\sin^2 t = 9(\cos t - \cos^2 t - \sin^2 t) = 9(\cos t - 1)$
donc $\dfrac{(x'^2+y'^2)}{x'y''-y'x''} = -2$. On en déduit que $x_\Omega = x + 2y' = 3(t+\sin t)$ et $y_\Omega = y - 2x' = -3(1-\cos t)$.

d) Les coordonnées de $M(t+\pi)$ sont
$x_M = 3(t+\pi-\sin(t+\pi)) = 3\pi + 3(t-(-\sin t)) = 3\pi + 3(t+\sin t)$;
$y_M = 3(1-\cos(t+\pi)) = 3(1+\cos t)$.
Celles de $N(t)$ sont $x_N = 3(t+\sin t)$; $y_N = -3(1-\cos t)$.
Celles du vecteur d'origine $M(t+\pi)$ et d'extrémité $N(t)$ sont donc :
$x_N - x_M = -3\pi$; $y_N - y_M = -6$
Quand t décrit $\mathbb{R}$, $t+\pi$ décrit aussi $\mathbb{R}$. La courbe Γ s'obtient à partir de la courbe $\mathscr{C}$ par une translation de vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}-3\pi\\-6\end{pmatrix}$. Γ est donc aussi une cycloïde.