Exercice I

1°) a) En utilisant un produit vectoriel, $\boxed{\text{9x+5y+2z-8=0}}$.

b) La droite (TH) est perpendiculaire au plan (ABC) donc tout vecteur directeur de (TH) est normal au plan. Comme (ABC) a pour équation $9x+5y+2z-8=0$, le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}9\\5\\2\end{pmatrix}$ est normal à (ABC) donc dirige (TH).

c) (TH) : $\begin{cases} x = x_T + tX_{\vec{u}} \\ y = y_T + tY_{\vec{u}} \\ z = z_T + tZ_{\vec{u}} \end{cases}$ donc, d'après le b) : (TH) : $\begin{cases} x = 2+9t \\ y = 3+5t \\ z = -1+2t \end{cases}$

d) H est l'intersection du plan (ABC) et de la droite (TH) donc $9(2+9t)+5(3+5t)+2(-1+2t)-8=0$ donc (...) $t=-\dfrac{23}{110}$ d'où, en remplaçant :

$$(TH) : \begin{cases} x = 2+9\times\left(-\dfrac{23}{110}\right) = \dfrac{13}{110} \\ y = 3+5\times\left(-\dfrac{23}{110}\right) = \dfrac{215}{110} = \dfrac{43}{22} \\ z = -1+2\times\left(-\dfrac{23}{110}\right) = -\dfrac{156}{110} = -\dfrac{78}{55} \end{cases} \text{ donc}$$

$\boxed{H\left(\dfrac{13}{110}\,;\,\dfrac{43}{22}\,;\,-\dfrac{156}{110}\right)}$.

La distance entre T et le plan (ABC) est $d=TH$. Or $\overrightarrow{TH}=t\vec{n}$ donc $TH=\dfrac{23}{110}||\vec{n}||=\dfrac{23}{110}\times\sqrt{9^2+5^2+2^2}=\boxed{\dfrac{23\sqrt{110}}{110}}$.

2°) a) (ABC) a pour équation $9x+5y+2z-8=0$ donc a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}9\\5\\2\end{pmatrix}$;

(Q) a pour équation $y-z=0$ donc a pour vecteur normal $\vec{n}'\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (car $9\times k\neq 0$) donc les plans ne sont ni parallèles, ni confondus donc sont sécants.

b) À partir des équations des plans, on écrit deux coordonnées en fonction de la troisième : $y=z$ donc $9x+5z+2z-8=0$ donc $9x=8-7z$ d'où $x=\dfrac{8}{9}-\dfrac{7}{9}z$.

En posant $z=t$, on obtient : $\begin{cases} x = \dfrac{8}{9}-\dfrac{7}{9}t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$

3°) Supposons que les droites possèdent un point commun. Ce point ne correspond pas forcément à la même valeur de « t » dans les deux systèmes : $\begin{cases} x = \dfrac{8}{9}-\dfrac{7}{9}t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 2+9t' \\ y = 3+5t' \\ z = -1+2t' \end{cases}$ donc $\begin{cases} \dfrac{8}{9}-\dfrac{7}{9}t = 2+9t' \\ t = 3+5t' \\ t = -1+2t' \end{cases}$ d'où il vient $3+5t'=-1+2t'$ donc $t'=-4/3$ puis $t=3+5\times(-4/3)=-11/3$. On regarde si ces valeurs sont compatibles avec la première égalité : $\dfrac{8}{9}-\dfrac{7}{9}\times\left(-\dfrac{11}{3}\right)=\dfrac{101}{27}$ mais $2+9t'=2+9\times\left(-\dfrac{4}{3}\right)=-10$.

Conclusion : les systèmes sont incompatibles donc les droites ne sont pas sécantes.

Exercice II

1°) Notons $c=\cos t$ et $s=\sin t$. Alors : $x^2+y^2+z^2=3s^2+\dfrac{1}{2}+\sqrt{6}s+\dfrac{1}{4}(9c^2-6\sqrt{3}cs+6\sqrt{2}c-2\sqrt{6}s+3s^2+2)+\dfrac{1}{4}(9c^2+6\sqrt{3}cs-6\sqrt{2}c-2\sqrt{6}s+3s^2+2)=\dfrac{9}{2}c^2+\dfrac{9}{2}s^2+\dfrac{3}{2}=6$ donc $r=\sqrt{6}$.

2°) $x+y+z=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$: équation d'un plan.

3°) $d=\dfrac{\left|-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

4°) Comme $d<r$, l'intersection est un cercle.

Rayon du cercle : $\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{\dfrac{9}{2}}$.

Droite $(O\Omega)$: vecteur directeur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ donc $x=t\,;\,y=t\,;\,z=t$.

Coordonnées du centre : $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,;\,y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,;\,z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.